Análisis Económico
Unidad de Análisis de Políticas Sociales y Económicas UDAPE

Evaluación de Inversiones en Recursos Naturales: Aplicación al Caso del Proyecto Minero San Cristóbal

Jorge Alejandro Escobari Urday
Christian Cárdenas Guzmán

Evaluación de Inversiones en Recursos Naturales: Aplicación al Caso del Proyecto Minero San Cristóbal

Jorge Alejandro Escobari Urday

Christian Cárdenas Guzmán

Resumen

Es de amplio conocimiento que la evaluación de inversiones en proyectos mineros y en otros recursos naturales, donde existe gran variabilidad en los precios de los productos, presenta dificultades en la estimación de los flujos financieros y la determinación de la tasa de descuento relevante. El presente trabajo se apoya en el modelo desarrollado por Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985), donde se aplican técnicas de arbitraje continuo y teorías de control estocástico a la evaluación de este tipo de proyectos, junto al desarrollo de políticas óptimas de apertura, gestión y abandono. La aplicación presentada, caso del proyecto minero San Cristóbal en Potosí, corresponde a una versión simplificada del modelo original. Los resultados encontrados, aunque sesgados, están en concordancia a lo esperado, y los resultados corregidos por el sesgo apoyan la incertidumbre actual en la decisión de puesta en marcha del proyecto

1 INTRODUCCIÓN

Aunque los procedimientos prácticos para la valoración de recursos naturales han evolucionado lentamente, se han realizado avances muy importantes en la teoría financiera durante las últimas dos décadas. La técnica tradicional deriva de una simple adaptación del modelo de valoración bajo certidumbre de Fisher (1907), en la cual, los flujos de caja esperados de un proyecto de inversión se descuentan a una tasa considerada apropiada a su riesgo, y el valor presente resultante se compara con el costo del proyecto. Esta técnica tradicional incluye los desarrollos teóricos modernos sólo como estimaciones de la tasa de descuento relevante a partir de una aplicación de la teoría del Capital Asset Pricing Model (CAPM).

Esta técnica ha mostrado ser inadecuada para valoraciones de capitales de inversión. La deficiencia más importante tiene que ver con la ausencia del tratamiento estocástico de los precios de los productos y posibles respuestas de gestión del riesgo del inversionista ante variaciones del precio. Si bien la incertidumbre de los precios no es importante en situaciones en que los precios relevantes son razonablemente predecibles, es muy importante en muchas de las industrias de recursos naturales, donde se observan variaciones en el precio de entre 25% - 40% anuales.

El modelo de evaluación de proyectos de inversión presentado en este trabajo, desarrollado por Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985), trata los precios de los productos como estocásticos. Esto lo hace apropiado para analizar proyectos de inversión en recursos naturales, donde la incertidumbre sobre el precio es elevada. El modelo de

Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985) considera explícitamente un control de gestión sobre la tasa de producción, la cual se asume variable en respuesta al precio de los productos. También considera la posibilidad de cierre o incluso abandono del proyecto si es que los precios caen demasiado. El modelo toma en cuenta explícitamente las variaciones en el riesgo y la tasa de descuento debidas a la velocidad de extracción del recurso y a la aleatoriedad del precio del producto.

El enfoque del trabajo utiliza un *portafolio autofinanciado*[1] constituido por títulos transados en los mercados, cuyos flujos de caja replican aquellos que se pretende valorar. Entonces, en equilibrio de mercado, el valor presente del flujo de caja del activo replicado es igual al valor presente del portafolio replicador.

La construcción del portafolio autofinanciado se apoya en el supuesto de que el *convenience yield*[2] del commodity producido puede ser definido como una función del precio del producto y que la tasa de interés no es estocástica. Estas consideraciones son suficientes para conducir a relaciones determinísticas entre los precios spot y futuro del commodity. De esta manera, los flujos del proyecto se pueden replicar a partir de un portafolio autofinanciado de bonos libres de riesgo y contratos futuros.

Adicionalmente, el modelo supone que el recurso a ser explotado es homogéneo y de monto conocido, que los costos son conocidos, y que las tasas de interés no son estocásticas. De la misma forma, el modelo supone la existencia de un mercado de futuros para el commodity producido.

Para permitir la dependencia de la tasa de extracción del precio estocástico de producción, Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985) modelan la decisión de valoración de capitales como un problema de control óptimo estocástico.

El tipo general de modelo desarrollado por Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985) y que se presenta en la sección 2, puede ser utilizado como un marco de referencia para la toma de decisiones respecto a cuando, cómo, y si es posible desarrollar la explotación de algún recurso natural. También se pueden analizar los efectos impositivos alternativos, regalías, políticas de subsidio a la inversión, y empleo y desempleo relativos al aprovechamiento de recursos naturales. El modelo permite sólo una tasa factible de operación cuando el proyecto está en operación, pero incluye la posibilidad de costos de apertura y cierre del proyecto.

En la sección 3 se presenta una versión del modelo bajo el supuesto de un recurso inagotable. En la sección 4 se discuten los resultados de un ejemplo numérico obtenido a partir del modelo discutido en la sección anterior. El alcance del ejemplo numérico se ve limitado por la resolución del modelo con recurso inagotable y los resultados obtenidos nos permiten referirnos únicamente a los precios del commodity que harían factible el desarrollo del proyecto de explotación y su cierre, no así al valor del proyecto mismo.

2 EL MODELO GENERAL DE VALORACIÓN

El modelo general de valoración de un proyecto de explotación de recursos naturales desarrollado por Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985) permite analizar proyectos de inversión tomando en cuenta la ínter temporalidad de la inversión.

---

[1] Un *portafolio autofinanciado* tiene la propiedad de que su valor en cualquier momento es exactamente igual al valor de la inversión y las distribuciones de los flujos de caja requeridos en ese momento *(Copeland, T. E. y Weston J. F. 1988).* En otras palabras, se trata de un portafolio con inversión neta igual a cero.

[2] Se entiende por *convenience yield* al retorno que obtiene el dueño de un commodity, que no puede ser obtenido por el dueño de un *futuro* sobre ese commodity *(Hull, J. C. 1997).*

2.1 Supuestos y Consideraciones Previas al Desarrollo del Modelo

Se supone que el proyecto bajo consideración producirá un solo commodity homogéneo cuyo precio spot, *S*, se determina de manera competitiva y que sigue un proceso estocástico browniano geométrico[3].

$$\frac{dS}{S} = \mu \ dt + \sigma \ dz \tag{1}$$

donde *dz* es el incremento de un proceso estándar Gauss – Wiener[4]; σ es la desviación estándar instantánea del precio spot, que se asume conocida; y μ es la tendencia local del precio, que puede ser estocástica.

Para la formulación del modelo general de valoración debemos considerar la relación entre los precios spot, futuro y el convenience yield del commodity. El convenience yield es el flujo de servicios que corresponde al dueño del commodity físico, pero no al dueño del contrato futuro que recibe la entrega del commodity. El beneficio proviene del hecho de que el dueño del commodity físico es capaz de escoger dónde guardará y cuando liquidará el inventario. Se puede pensar en el convenience yield como en la ganancia derivada de la propiedad en periodos de escasez local.

El convenience yield dependerá de la identidad del individuo que posee el inventario, y en equilibrio, los inventarios estarán en manos de aquellos para quienes el convenience yield marginal sea el máximo. Se supondrá que siempre se guarda una cantidad positiva de commodity en inventario, y que la competencia entre potenciales bodegas para el almacenaje asegurará que el convenience yield sea siempre el mismo entre todos los individuos que poseen inventarios. Para simplificar, se supone que el convenience yield marginal del commodity se puede escribir como una función del precio spot y del tiempo, *C(S,t).*

Si se supone que el convenience yield es sólo función del precio spot, y que la tasa de interés es constante e igual a ρ, entonces se puede determinar una relación entre el precio spot del commodity y el valor del futuro cuyo activo subyacente es el commodity. Así, $F(S,\tau)$ corresponde al precio del futuro en el momento *t*, para la entrega de una unidad del commodity en el momento *T*, donde $\tau = T - t$. Nótese que *F* es función del proceso browniano que sigue *S*. De esta manera, el cambio instantáneo en el precio del futuro, *F*, esta dado por el lema de Ito[5]:

$$dF = \left(-F_{\tau} + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma^2 S^2 \right) dt + F_S dS \tag{2}$$

Considerando la tasa de retorno instantánea ganada por un individuo que compra una unidad de commodity y se endeuda en $(F_S)^{-1}$ contratos futuros (número de contratos). Dado que contar con un contrato futuro no implica la recepción de fondos, la tasa instantánea de retorno por dólar invertido, incluyendo el convenience yield marginal neto y usando (2), es:

$$\frac{dS}{S} + \frac{C(S)}{S} - (SF_S)^{-1} dF = (SF_S)^{-1} \left[F_S C(S) - \frac{1}{2} F_{SS} \sigma^2 S^2 + F_{\tau} \right] dt \tag{3}$$

Dado que este retorno es no estocástico y que *C(S)* se define como el convenience yield (neto) de una unidad marginal de inventario, el retorno debe ser igual a la tasa de libre de

[3] Un proceso estocástico browniano geométrico corresponde a un tipo de movimiento Browniano (ver nota 4).

[4] Un proceso Wiener es un es un tipo particular de proceso estocástico Markov, que ha sido usado en física para describir el movimiento de una partícula sujeta a una serie de shocks moleculares continuos, también conocido como movimiento Browniano *(Hull J. C. 1997, pag. 210-215)*.

[5] El lema de Ito establece que la variación de una función que depende de otra que sigue un proceso Browniano incluye una variable de segundo orden no despreciable, la precisamente sigue el proceso Browniano *(Hull J. C. 1997, pag. 220)*.

riesgo ρdt. Igualando el lado derecho de la ecuación (3) a ρdt, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}F_{SS}\sigma^2 S^2 + F_S(\rho S - C) - F_\tau = 0 \qquad (4)$$

Así, el precio del futuro está dado por la solución de la ecuación (4), sujeta a la condición de borde,

$$F(S,0) = S \qquad (5)$$

Esto establece que el precio del futuro es una función del precio spot actual y del tiempo de maduración. Más aún, los parámetros del convenience yield se pueden estimar directamente a través de la relación entre los precios spot y futuro. Si el convenience yield es proporcional al precio spot,

$$C(S,t) = cS \qquad (6)$$

de acuerdo a Hull, J. C. (1997) el precio del futuro está dado por,

$$F(S,\tau) = Se^{(\rho - c)\tau} \qquad (7)$$

independientemente del proceso estocástico del precio spot.
Finalmente, reemplazando (4) en (2), el cambio instantáneo en el precio futuro se puede expresar en términos del convenience yield y el cambio instantáneo en el precio spot de acuerdo a

$$dF = F_S\left[S(\mu - \rho) + C\right]dt + F_S S\sigma dz \qquad (8)$$

2.2 Derivación del Modelo General de Valoración para un Proyecto de Explotación de Recursos Naturales

Para derivar la ecuación diferencial parcial que debe ser satisfecha por el valor de un proyecto de explotación de recursos naturales y caracterizar la política de extracción óptima este proyecto se considerarán las relaciones expuestas en el anterior subtítulo.
La tasa de extracción del proyecto de explotación, *q*, se asume variable a costo cero entre un extremo superior, $\bar{q}$, y otro inferior, $\underline{q}$ (estos límites pueden depender de la cantidad de inventario que queda en el yacimiento del recurso y del tiempo). La tasa de extracción se puede bajar de $\underline{q}$ sólo cerrando el proyecto, y existe un costo asociado al cierre y reapertura del mismo. Por esta razón el valor del proyecto dependerá de si está en marcha (abierto) o parado (cerrado). El valor del proyecto también dependerá del precio actual del commodity, *S*; el inventario físico del commodity a explotar en el proyecto, *Q*; el tiempo calendario, *t*; y de la política de operación del proyecto, ϕ. Se escribe el el valor del proyecto como,

$$H \equiv H(S,Q,t;j,\phi) \qquad (9)$$

La variable indicativa *j* toma el valor de uno si el proyecto está en operación (abierto) y cero si está parado (cerrado). La política de operación está descrita por la función que determina la tasa de extracción cuando el proyecto esta operando $q(S, Q, t)$, y tres precios críticos de producción del commodity: $S_1(Q, t)$ que es el precio al que se cierra el proyecto si este estaba previamente operando; $S_2(Q, t)$ es el precio al que el proyecto se reabre si estaba previamente parado (cerrado); $S_0(Q, t)$ es el precio al que el proyecto se abandona si ya estaba parado (cerrado). La distinción entre cierre y abandono es que un proyecto cerrado incurre en costos de mantención fijos, pero puede ser reabierto de nuevo. Un proyecto abandonado no incurre en ningún costo, pero se asume como permanentemente abandonado.
Aplicando el lema de Ito a (9), el cambio instantáneo del valor del proyecto está dado por,

$$dH = H_S dS + H_Q dQ + H_t dt + \frac{1}{2} H_{SS} (dS)^2 \qquad (10)$$

donde el cambio instantáneo en el inventario físico del commodity a explotar en el proyecto está determinado por la tasa de extracción según,

$$dQ = -q dt \qquad (11)$$

El flujo de caja después de impuestos, o tasa continua de dividendos, del proyecto es,

$$q(S - A) - M(1 - j) - \lambda_j H - T \qquad (12)$$

donde:

- $A(q, Q, t)$ corresponde al costo promedio de producir a la tasa q en el tiempo t cuando las reservas físicas del commodity a explotar en el proyecto son Q;
- $M(t)$ es la tasa después de impuestos de mantención del proyecto en el tiempo t cuando este está parado (cerrado);
- $\lambda_j (j = 0, 1)$ es la tasa proporcional de impuestos sobre el valor del proyecto cuando está parado (cerrado) y operando (abierto); y
- $T(q, Q, S, t)$ corresponde al impuesto total al ingreso del proyecto cuando está operando. Muchas formas alternativas para la función de impuestos son posibles, en este caso asumiremos

$$T(q, Q, S, t) = t_1 q S + \max\{t_2 q[S(1 - t_1) - A], \quad 0\} \qquad (13)$$

donde,

t_1 es la tasa de la regalía y t_2 la tasa de impuestos al ingreso.

Los parámetros λ_0 y λ_1 se interpretan simplemente como tasas de impuesto a la propiedad. Pero, pueden tener una interpretación alternativa, ya que en algunos contextos pueden representar las intensidades de un proceso de Poisson que gobierna el evento de una expropiación no compensada a los dueños del proyecto. Así, las tasas de pérdidas esperadas a partir de la expropiación son $\lambda_j H$ y la expresión (12) representa el flujo de caja neto del costo esperado de expropiación. Bajo esta interpretación la estrategia de arbitraje mostrada más abajo no es enteramente libre de riesgo, sin embargo, se puede asumir que no existe ningún premio al riesgo asociado a la posibilidad de expropiación.

Para derivar la ecuación diferencial que gobierna el valor del proyecto bajo la política de extracción ϕ se considera el retorno de un portafolio que consiste en una posición larga[6] en el proyecto y una posición corta en (H_S/F_S) contratos futuros. El retorno del proyecto está dado por (10) – (12) y el cambio en el precio de los futuros por (8). Combinando estas y usando (1), el retorno del portafolio es:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{SS} - q H_Q + H_t + q(S - A) - M(1 - j) - T - \lambda_j H + (\rho S - C) H_S \qquad (14)$$

Suponiendo que no existe posibilidad de expropiación, este retorno es no estocástico y para eliminar oportunidades de arbitraje debe ser igual al retorno libre de riesgo. Igualando la expresión (14) a la tasa de retorno libre de riesgo ρH, el valor del proyecto debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{SS} + (\rho S - C) H_S - q H_Q + H_t + q(S - A)$$
$$- M(1 - j) - T - (\rho + \lambda_j) H = 0 \qquad (15)$$
$$(j = 0, 1)$$

[6]Un inversionista adopta una posición larga cuando ha vendido la opción y adopta una posición corta cuando ha comprado la opción.

El valor del proyecto satisface (15) para cualquier política de operación $\phi \equiv \{q, S_0, S_1, S_2\}$. Bajo la política de maximización del valor del proyecto $\phi^* \equiv \{q^*, S_0^*, S_1^*, S_2^*\}$, $V(S, Q, t)$ corresponde al valor del proyecto cuando esta operando (abierto), y $W(S, Q, t)$ al valor del proyecto cuando está cerrado,

$$V(S,Q,t) \equiv \max_{\phi} H(S,Q,t;1,\phi) \tag{16}$$

$$W(S,Q,t) \equiv \max_{\phi} H(S,Q,t;0,\phi) \tag{17}$$

El valor que maximiza la producción y el valor del proyecto bajo la política de maximización ϕ^* satisface las dos ecuaciones,

$$\max_{q\in(\underline{q},\bar{q})}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (\rho S - C)V_S - qV_Q + V_t + q(S-A) - T - (\rho+\lambda_1)V = 0\right] \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 W_{SS} + (\rho S - C)W_S + W_t - M - (\rho+\lambda_0)W = 0 \tag{19}$$

Dado que las políticas de apertura, cierre y abandono del proyecto son conocidos por los inversionistas, tenemos,

$$W(S_0^*,Q,t) = 0 \tag{20}$$

$$V(S_1^*,Q,t) = \max\left[W(S_1^*,Q,t) - K_1(Q,t)\ ,\quad 0\right] \tag{21}$$

$$W(S_2^*,Q,t) = V(S_2^*,Q,t) - K_2(Q,t) \tag{22}$$

donde $K_1(.)$ y $K_2(.)$ son los costos de cierre y apertura del proyecto respectivamente. Suponiendo que el valor del proyecto es igual a cero cuando el inventario físico del commodity a explotar se agota, se tiene la siguiente condición de borde:

$$W(S,0,t) = V(S,0,t) = 0 \tag{23}$$

Finalmente, dado que S_0^*, S_1^*, S_2^* se eligen para maximizar el valor del proyecto, se tienen las siguientes "high contact conditions"[7],

$$W_S(S_0^*,Q,t) = 0 \tag{24}$$

$$V_S(S_1^*,Q.t) = \begin{cases} W_S(S_1^*,Q,t) & si \quad W(S_1^*,Q,t) - K_1(Q,t) \geq 0, \\ 0 & si \quad W(S_1^*,Q,t) - K_1(Q,t) < 0 \end{cases} \tag{25}$$

$$W_S(S_2^*,Q,t) = V_S(S_2^*,Q,t) \tag{26}$$

El valor del proyecto depende del tiempo de calendario sólo porque los costos A, M, K_1 y K_2 y el convenience yield C depende del tiempo. Si hubiese una tasa constante de inflación π en todas estas y si $C(S, t)$ se puede escribir como κS, entonces las ecuaciones (18) – (26) se pueden simplificar como sigue:

Definiendo las variables deflactadas,

$$a(q,Q) = Aq,Q,t)e^{-\pi t}$$

$$f = M(t)e^{-\pi t}$$

$$k_1(Q) = K_1(Q,t)e^{-\pi t} \quad , \quad k_2(Q) = K_2(Q,t)e^{-\pi t}$$

$$s = Se^{-\pi t}$$

$$v(s,Q) = V(S,Q,t)e^{-\pi t}$$

$$w(s,Q) = W(S,Q,t)e^{-\pi t}$$

Entonces el valor deflactado del proyecto debe satisfacer:

[7] Se denomina "high contact condition" a la condición local donde la primera derivada por la izquierda es igual a la primera derivada por la derecha.

$$\max_{q\in(\underline{q},\bar{q})}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 v_{SS}+(r-\kappa)sv_S-qv_Q+q(s-a)-\tau-(r+\lambda_1)v=0\right] \tag{27}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^s w_{SS}+(r-\kappa)sw_S-f-(r+\lambda_0)w=0 \tag{28}$$

donde $r = \rho - \pi$ corresponde a la tasa de interés real.

$$\tau = t_1 qs+\max\{t_2 q[s(1-t_1)-a], \quad 0\} \tag{29}$$

$$w(s_0^*,Q)=0 \tag{30}$$

$$v(s_1^*,Q)=\max[w(s_1^*,Q)-k_1(Q), \quad 0] \tag{31}$$

$$w(s_2^*,Q)=v(s_2^*,Q)-k_2(Q) \tag{32}$$

$$w(s,0)=v(s,0)=0 \tag{33}$$

$$w_S(s_0^*,Q)=0 \tag{34}$$

$$v_S(s_1^*,Q)=\begin{cases} w_S(s_1^*,Q) & si \quad w(s_1^*,Q)-k_1(Q)\geq 0, \\ 0 & si \quad w(s_1^*,Q)-k_1(Q)<0 \end{cases} \tag{35}$$

$$w_S(s_2^*,Q)=v_S(s_2^*,Q) \tag{36}$$

Las ecuaciones (27) – (36) constituyen el modelo general para encontrar el valor de un proyecto que depende del precio de un commodity. Con ellas no sólo se puede determinar el valor (deflactado) del proyecto cuando está operando o cuando está cerrado, sino también las políticas óptimas de apertura, cierre y abandono del proyecto.

El modelo de valoración presentado no tiene solución analítica, y debe resolverse numéricamente. Sin embargo, es posible resolver analíticamente el sistema de ecuaciones (27) – (36) suponiendo que la variable *Q* (única variable común a todas las ecuaciones diferenciales parciales) tiende a infinito. En la siguiente sección se presenta la versión simplificada del modelo suponiendo el caso de un proyecto con recursos infinitos.

3 EL CASO DE UN YACIMIENTO INFINITO

Para obtener un modelo con solución analítica se asume que el inventario físico del commodity a explotar durante el transcurso del proyecto es infinito, es decir *Q* es infinito. Si se asume esta condición las ecuaciones diferenciales parciales (27) y (28) se pueden reemplazar con ecuaciones diferenciales ordinarias dado que el inventario *Q* ya no es una variable de estado relevante. Para facilitar el análisis, se asume además que el sistema de impuestos permite una compensación total por pérdidas de manera que (29) se convierte en:

$$\tau = t_1 qs+t_2 q[s(1-t_1)-a] \tag{29'}$$

Finalmente, se asume que el proyecto sólo puede operar bajo dos posibles políticas, q^*, cuando está operando, y cero, cuando está parado. Además, debido a que es costoso comenzar a operar o parar el mismo se debe incurrir en costos al moverse de un nivel de extracción al otro.

Bajo los anteriores supuestos el valor (deflactado) del proyecto cuando está operando a la tasa q^*, satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 v_{SS}+(r-\kappa)sv_S+ms-n-(r+\lambda_1)v=0 \tag{37}$$

donde $m = q^*(1-t_1)(1-t_2)$, y $n = q^*a(1-t_2)$.

Si se asume que el costo de mantenimiento del proyecto parado (cerrado), *f*, es cero, entonces el valor del mismo satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^s w_{SS} + (r-\kappa)sw_S - (r+\lambda_0)w = 0 \qquad (38)$$

Las condiciones de borde se obtienen ignorando *Q* en (31), (32), (35) y (36) y haciendo *w*(0) = 0 (en ausencia de costos de mantenimiento nunca es óptimo abandonar una proyecto parado - cerrado - dado que siempre existe la posibilidad de que vuelva a operar).
Las soluciones completas a las ecuaciones (37) y (38) son *(Simmons, G. F. 1993):*

$$w(s) = \beta_1 s^{\gamma_1} + \beta_2 s^{\gamma_2} \qquad (39)$$

$$v(s) = \beta_3 s^{\gamma_1} + \beta_4 s^{\gamma_2} + \frac{ms}{\lambda+\kappa} - \frac{n}{r+\lambda} \qquad (40)$$

donde los β's son constantes a determinar a partir de las condiciones de borde y,

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \ , \quad \gamma_2 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{r-\kappa}{\sigma^2} \ , \quad \alpha_2 = \left[\alpha_1^2 + \frac{2(r+\lambda)}{\sigma^2}\right]^{1/2}$$

Si se asume $(r+\lambda)>0$ (esto es necesario para que el valor presente de los costos futuros sea finito), entonces $\beta_2 = 0$ ya que γ_2 es negativo y *w*(*s*) debe mantenerse finito a medida que s se acerca a cero. De manera similar, dado que $\gamma_1 > 1$, si se impone el requerimiento que *v*/*s* sea finito cuando $s \to \propto$, $\beta_3 = 0$, Así, el valor del proyecto parado (cerrado) está dado por $w(s) = \beta_1 s^{\gamma_1}$ y el valor del proyecto operando por:

$$v(s) = \beta_4 s^{\gamma_2} + \frac{ms}{\lambda+\kappa} - \frac{n}{r+\lambda} \qquad (41)$$

Si se ignora la posibilidad de cierre del proyecto cuando los precios de producción son bajos, el valor del proyecto está dado por los dos últimos términos de la ecuación (41); por tanto, el primer término representa el valor de la opción de cierre.
Las constantes que quedan, β_1 y β_4, así como la política óptima de apertura y cierre, representadas por S_1* y S_2*, se determinan a través de las condiciones (31), (32), (35) y (36) las que implican que:

$$\beta_1 = \frac{ds_2^*(\gamma_2 - 1) + b\gamma_2}{(\gamma_2-\gamma_1)s_2^{*\gamma_1}} \ , \quad \beta_4 = \frac{ds_2^*(\gamma_1 - 1) + b\gamma_1}{(\gamma_2-\gamma_1)s_2^{*\gamma_2}}$$

$$s_2^* = \gamma_2(e - bx^{\gamma_1})/(x^{\gamma_1} - x)d(\gamma_2 - 1)$$

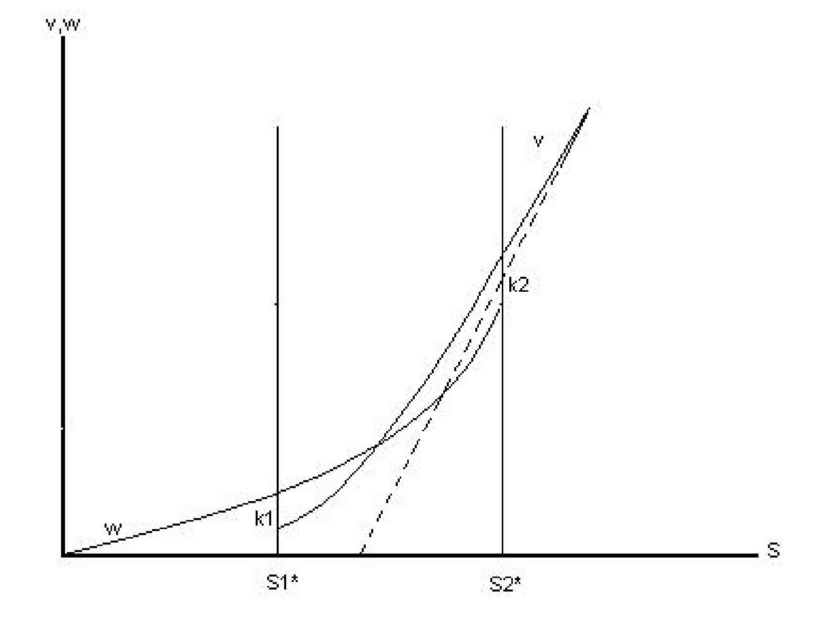
$$x = \frac{s_1^*}{s_2^*}$$

donde $e = k_1 - n/(r+\lambda)$, $b = -k_2 - n/(r+\lambda)$, $d = m/(\lambda+\kappa)$, y donde *x*, que es la razón entre los precios de los commodities a los que se cierra o abre del proyecto, se obtiene a partir de la solución de la ecuación:

$$\frac{(x^{\gamma_2} - x)(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(e - bx^{\gamma_2})} = \frac{(x^{\gamma_1} - x)(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(e - bx^{\gamma_1})} \qquad (42)$$

La solución de esta ecuación se ilustra en la Figura 1. En esta Figura la línea punteada representa el valor presente de los flujos de caja del proyecto bajo el supuesto que este nunca puede parar; esto se obtiene haciendo $\beta_4 = 0$ en la ecuación (42). Dado que $\gamma_2 < 0$ el valor de opción de cierre disminuye y se aproxima a cero para valores altos de precios. Para precios bajos el proyecto vale más cuando está cerrado que cuando está operando y se incurren en pérdidas a causa del costo de cierre. De todas maneras, para precios altos el proyecto vale más cuando está operando, y para un precio de commodity S_2* vale lo suficiente como para garantizar su apertura dado k_2 (costo de apertura). En la figura se puede ver claramente que si los costos de apertura y cierre se acercan a cero, S_1* y S_2* se aproximarán a un mismo valor y el valor del proyecto se puede dibujar a través de una sola curva. Si, por el contrario, el costo de cerrar el proyecto se hace muy alto, el valor de opción de cierre no es significativo y en el límite el valor del proyecto operando (abierto) alcanza a la línea punteada.

Figura Nº1 "Valor del Proyecto Operando (v) y Cerrado (w) en Función del Precio Spot del Commodity a Explotar en el Proyecto, s"



Fuente: Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985).

4 APLICACIÓN AL CASO DEL PROYECTO MINERO SAN CRISTÓBAL

En la actualidad San Cristóbal es el proyecto minero más grande de Bolivia, de implementarse podría llegar a representar el 40% de las exportaciones mineras del país y convertirse en la mina de plata más grande del mundo.

San Cristóbal se encuentra en el departamento de Potosí, provincia Nor Lípez a 120 Km. de Uyuni. El área aproximada que cubre la mina es de 30 km^2. La compañía inversionista es Andean Silver Corporation filial de la empresa norteamericana Apex Silver. La inversión realizada hasta el momento es de $us 94 MM, de los cuales $us 20,7 MM fueron invertidos en exploración. Para la instalación de la mina y arranque de operaciones se requiere una inversión adicional de $us 450 MM; se prevé una inversión indirecta de $us 150 MM.

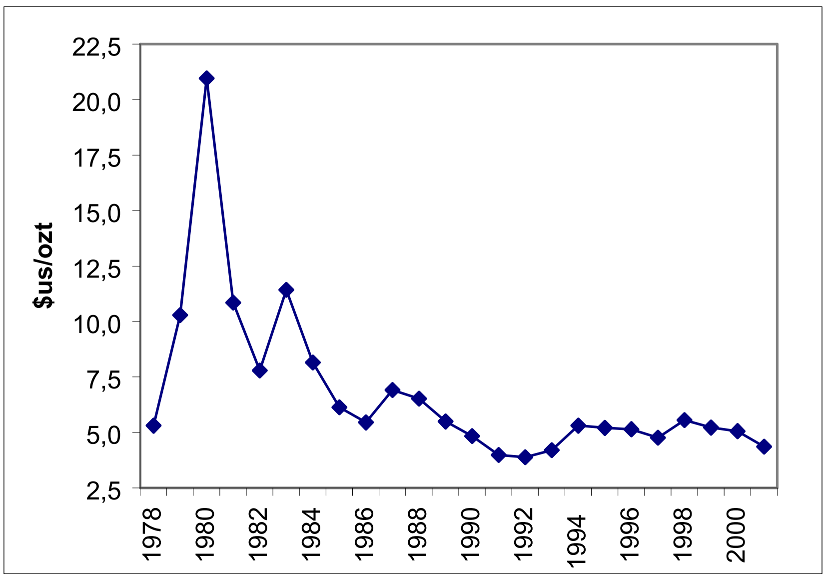
Las reservas están estimadas entre los 219 y 470 MM de onzas de plata, alrededor de 1,8 MM de toneladas de zinc y 0,6 MM de toneladas de plomo. La duración del proyecto está programada en 17 años y el inicio de operaciones para el 2005.

Las proyecciones de costos de la mina San Cristóbal la colocan como una de las minas de menores costos en la producción de plata y zinc en el mundo. Se estima que durante los primeros 5 años de explotación de la mina los costos promedio de producción por onza de plata y por libra de zinc son de alrededor 1,23 y 0,23 $us respectivamente. Los costos promedio de operación a lo largo de la vida del proyecto están estimados en 1,83 $us/oz de plata y 0,27 $us/lb de zinc.

La tasa estimada de producción anual para los primeros 5 años de operación se sitúa alrededor de los 27 MM de oz. de concentrado de plata por año y 570 MM de lb. de

concentrados de zinc. A partir del sexto año de producción, la producción diaria aumentaría en 50%. La recuperaciones promedio estimadas del proceso metalúrgico para toda la vida del proyecto son de 77% para la plata, 92% para el zinc y 87% para el plomo.
Dada la importancia que este proyecto minero puede tener en la economía boliviana y la magnitud de las inversiones requeridas, surgen importantes interrogantes como: ¿cuándo es conveniente poner en marcha el proyecto?, ¿cuándo es conveniente cerrarlo?, ¿cuál es el valor del mismo?, y ¿tiene el Gobierno control sobre alguna variable que afecte el valor de la mina?. Estas preguntas se pueden responder con la ayuda de los modelos presentados en las secciones anteriores. En este caso se utilizará el supuesto de que San Cristóbal es un proyecto argentífero infinito, por la enorme simplificación matemática que ello implica.

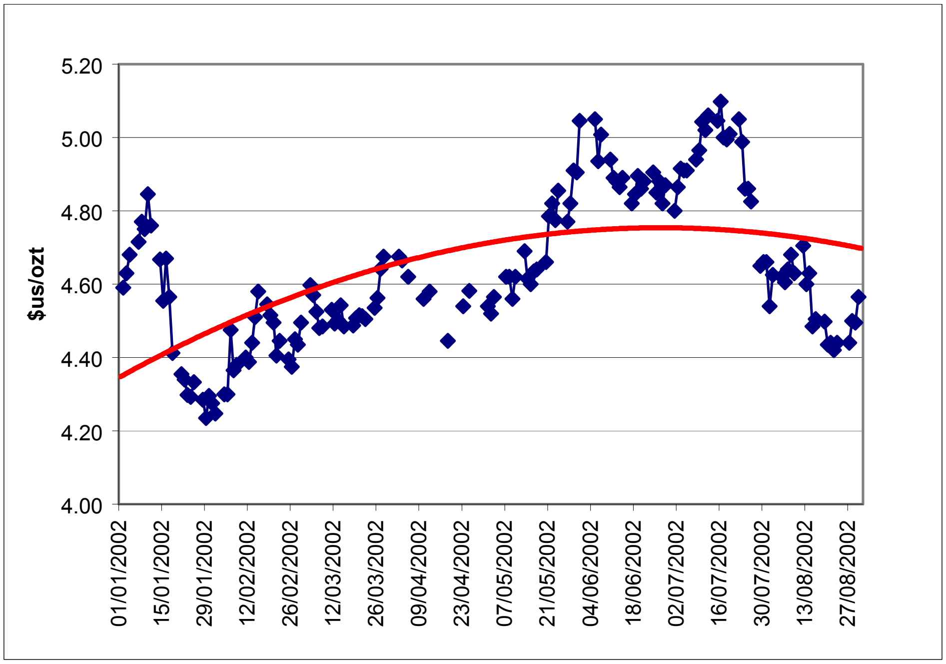
Figura Nº2 "Cotización de la Plata: Promedios Anuales, Periodo 1978 - 2001"



Fuente: Unidad de Análisis de Política Sectorial – Viceministerio de Minería y Metalurgia a partir del London Metal Exchange (LME)

Si se observan las cotizaciones de la plata durante los últimos 10 años (Figura Nº2), la variación entre cotizaciones extremas durante el periodo considerado (1978 – 2001) es de 438%. Además, la variación extrema de las cotizaciones entre 1978 y mediados de la década de los ochenta es notablemente mayor a su similar entre mediados de los ochenta y 2001 (295% v/s 77,4%). Estas variaciones son notablemente altas, y demuestran la alta volatilidad del precio del commodity que vendería San Cristóbal.
A pesar de las altas variaciones que se registraron desde 1978, durante los últimos 8 o 9 años los precios han presentado variaciones menores, pero aún significativas. Este hecho se ilustra observando las cotizaciones de la plata entre enero y agosto de 2002 (Figura Nº 3), en el que se registró un precio mínimo de 4,24 $us/ozt y uno máximo de 5,10 $us/ozt, lo que implica una variación del 20% durante el periodo.

Figura Nº3 "Cotización Diaria de la Plata: Enero – Agosto 2002"



Fuente: Unidad de Análisis de Política Sectorial – Viceministerio de Minería y Metalurgia a partir del London Metal Exchange (LME)

Para la estimación empírica del modelo (con yacimiento infinito), se utilizó un precio spot de la plata de 4,55 $us/ozt[8], una tasa óptima de extracción de 20.790.000 ozt/año, calculados como el porcentaje de recuperación promedio del proceso metalúrgico estimado para la plata (77%) multiplicado por la producción proyectada para los primeros 5 años (27.000.000 ozt/año). El costo promedio de producción para la tasa de producción señalada se calculó como la suma del costo promedio de operación a lo largo de la vida del proyecto (1,83 $us/oz) y una aproximación al costo de inversión por onza troy calculado como la división entre la inversión inicial ($us 500 MM), la duración del proyecto (17 años) y la tasa de extracción óptima (27 MM ozt/año). En cuanto a los costos de apertura y cierre se suponen iguales a $us 16 MM, equivalentes a aproximadamente 1,6% del valor de la mina (valor referente de los costos de apertura y cierre de una mina de cobre con una tasa de extracción de 10 millones de lb. al año[9]).

La estructura tributaria esta compuesta por un impuesto a las utilidades netas de 25%, un Impuesto Complementario Minero (ICM) o regalía, variable e igual a 3,15% (según lo establecido en la Ley 1777). Se hace notar que el valor de λ es 0% ya que en Bolivia no existe ningún impuesto patrimonial y la probabilidad de expropiación es cero. Por otro lado, la tasa de interés real, *r*, se calculó como la diferencia entre la tasa de interés que paga una Letra del Tesoro americano a 10 años plazo (3,98%), considerada como una tasa de interés libre de riesgo, y la tasa de inflación anual esperada de Estados Unidos (2,5%).

[8] Cotización de la plata el 16 de septiembre de 2002.

[9] Los costos de apertura y cierre dependen de las características particulares de cada mina: volumen de material extraído, proceso de extracción y número de trabajadores empleados (entre otros). En el caso de la mina San Cristóbal no se dispone de suficiente información como para realizar una aproximación de los costos de apertura y cierre tomando en cuenta estas variables. De todas maneras los resultados obtenidos no son sensibles a variaciones de estos costos.

Para obtener el convenience yield se utilizó la fórmula para la determinación del precio de un futuro (ecuación 7) tomando como precio spot 4,55 $us/ozt, precio del futuro igual a 4,58 $us/ozt con vencimiento en tres meses[10] y la tasa de interés libre de riesgo igual a 3,98% anual[11]. La varianza utilizada corresponde a la de los retornos anuales de los precios de la plata continuamente compuestos durante los últimos 23 años. Se utilizó la varianza de los retornos ya que se considera que el mercado de la plata es un mercado eficiente, en el que los precios siguen un camino aleatorio y la mejor predicción del precio en el período siguiente es el precio actual.

Tabla Nº1. "Datos para el Modelo: Mina San Cristóbal"

Mina	s ($/ozt)	5,55
	q* (ozt/año)	20.790.000
	a ($/oz)	2,93
	k1 y k2 ($)	16.000.000
Impuestos	λ (%)	0,00%
	t2 (%)	25,00%
	t1 (%)	4,16%
	r (%)	1,48%
Plata	k (%)	1,35%
	σ^2 (%)	9,57%

Los resultados obtenidos (Tabla Nº2 y Figura Nº4) muestran que los precios óptimos de apertura (S_2^*) y cierre (S_1^*) son 4,51 y 2,16 $us/ozt respectivamente. Esto implica que hasta que el precio no supere los 4,51 $us/ozt la decisión óptima sería la de no abrir la mina. Por otro lado, si la mina ya está operando, no es aconsejable cerrarla mientras el precio no baje más allá de los 2,16 $us/ozt. Esto significa que mientras la diferencia entre el valor de la mina cerrada y abierta, para precios spot entre 2,16 y aproximadamente 3 $us/ozt, no supere el costo de cierre, es óptimo mantener la mina abierta. Cuando ello ya no ocurre, a partir de un precio de la plata de 2,16 $us/ozt la mina debería cerrarse.
Por otro lado, es interesante notar que el valor de la mina al momento del cierre (S=2,16 $us/ozt) es mayor (3 veces) al valor de la inversión inicial en el proyecto que está alrededor de los $us 500 MM. Esta relación es intuitiva en tanto el valor de una operación minera en operación debiera ser mayor a la inversión inicial.
Debe tomarse en cuenta la alta sensibilidad de los valores de la mina encontrados (y con ellos los valores de S_1^* y S_2^*) ante variaciones en los costos promedio de producción, a, valor del convenience yield, c, y a la volatilidad de los precios, σ^2.
Además, la menor sensibilidad de los valores de la mina ante cambios en la estructura tributaria, indica que las variables sobre las que tiene control el Gobierno tienen una menor influencia que las variables propias a la explotación. Ante un cambio del +10% en el valor de a, el valor de la mina se reduce en 1,84%, junto con aumentos en los precios de apertura y cierre de 4,51 $us/ozt a 4,90 $us/ozt y de 2,16 $us/ozt a 2,4 $us/ozt respectivamente. Pero, si se realiza un cambio del +10% en t_1 o t_2 los valores de la mina disminuyen en promedio 2%, junto con cambios en los precios de apertura y cierre de +2

[10] Los datos de los precios spot y futuro, junto con el tiempo de maduración del futuro, se obtuvieron de la London Metal Exchange (16 de septiembre de 2002).

[11] T-bill a 10 años plazo (16 de septiembre de 2002).

centavos de dólar con respecto al valor original de S_2* de 4,51 \$us/ozt y de +2 y -1 centavos de dólar con respecto al valor original de S_1* de 2,16 \$us/ozt respectivamente[12].
Finalmente, se espera que los resultados reportados de S_1^* y S_2^* tengan un sesgo hacia la baja con relación a los precios óptimos de apertura y cierre que se obtendrían en el caso de una mina con yacimiento finito. Es decir, se esperaría que S_1^* y S_2^* para San Cristóbal con yacimiento finito sean levemente más altos. De acuerdo a estimaciones preliminares S_1^* y S_2^* con yacimiento finito estarían aproximadamente en 2,48 y 5,19 \$us/ozt respectivamente, alrededor de un 15%[13] por encima de los valores reportados. Esta afirmación está en concordancia con el hecho de que a mayor inventario de la mina, es mayor el incentivo para extraer el mineral más rápidamente, lo que conduciría a una disminución en costos y precios óptimos de apertura y cierre de la mina.
De manera similar se espera que los resultados reportados de *v(s)* y *w(s)*, correspondientes a los valores de la mina abierta y cerrada respectivamente, estén sesgados hacia arriba. Es decir, se esperaría que *v(s)* y *w(s)* para San Cristóbal con yacimiento finito sean más bajos. La dirección del sesgo es intuitiva, ya que a mayores reservas mayor será el valor de la mina.

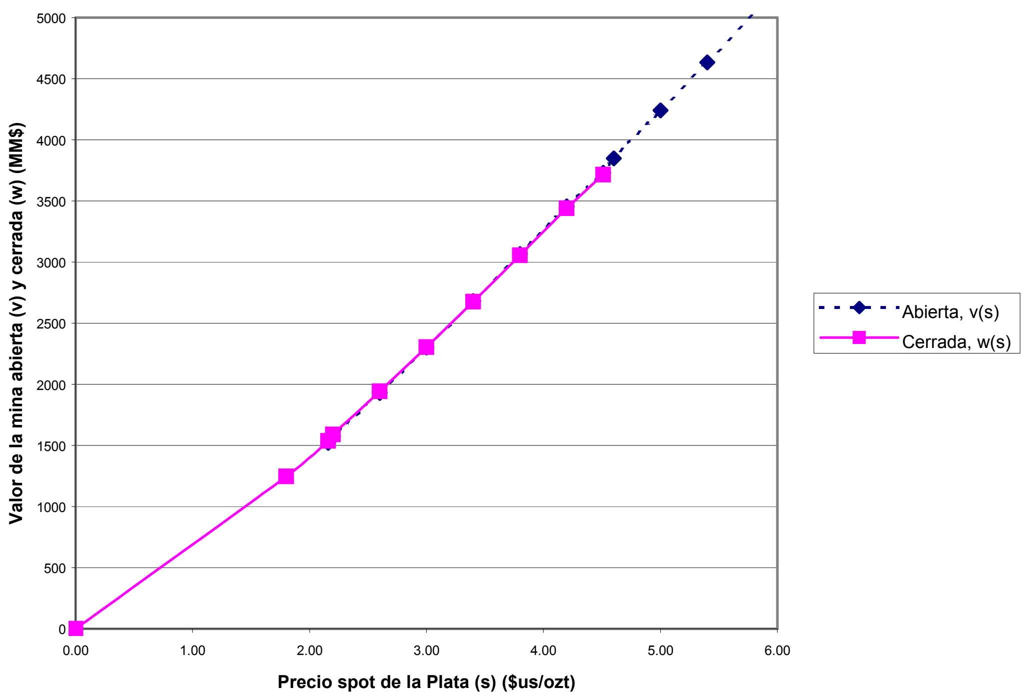
[12] Aunque los valores de la mina, S_1^* y S_2^* son altamente sensibles a cambios en ***c*** y σ^2, estos valores son *cuasi* datos sobre los cuales no se tiene control: ***c*** depende de las cotizaciones spot y de las características del futuro; σ^2 de las variaciones históricas de los precios.

[13] La magnitud de este sesgo se basa en la comparación de resultados para minas con y sin yacimiento infinito con datos de Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. 1985 y estimaciones propias.

Tabla Nº2. "Resultados"

Precio de la Plata ($/lb) s	Valor de la mina (MM$) Abierta, v(s)	Cerrada, w(s)
0,00		0
1,80		1.246
2,16	1.520	1.536
2,20	1.572	1.588
2,60	1.930	1.941
3,00	2.302	2.304
3,40	2.681	2.676
3,80	3.067	3.055
4,20	3.456	3.441
4,51	3.730	3.714
4,60	3.848	
5,00	4.241	
5,40	4.635	
5,80	5.029	

Figura Nº4 "Valor de la Mina San Cristobal"



5 CONCLUSIONES

Este trabajo presenta resultados de una versión restringida, que supone un yacimiento infinito, del modelo de Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985) aplicada al caso de la mina San Cristóbal. El modelo presentado plantea una alternativa para la valoración de activos que considera de manera explícita la volatilidad de los precios, fundamental para el valor de muchos activos que dependen crucialmente de esta variable. La ventaja fundamental que ofrece este modelo por sobre el modelo tradicional de valoración de activos es que deja de lado la subjetividad en la proyección de los flujos futuros y en la estimación de la tasa de descuento relevante.

La aplicación del modelo restringido al caso del proyecto San Cristóbal arroja algunos resultados interesantes, entre los que destaca la dependencia de la apertura de la mina y su valor a cambios en el precio spot. Los precios específicos de apertura y cierre encontrados, así como los de valoración de la mina, están sesgados. Los primeros, precios de apertura y cierre, hacia abajo, mientras los segundos, valor de la mina, hacia arriba. Sólo en el caso de los precios de apertura y cierre se pudo establecer una aproximación a la magnitud del sesgo, que implicaría un precio de apertura de alrededor de 5,19 $us/ozt, (nivel aún no alcanzado por las cotizaciones internacionales de la plata durante los últimos ocho meses). Tal vez por ello, Andean Silver Corporation aun no haya iniciado su proyecto.

Por otra parte, debe considerarse que los resultados presentados dependen crucialmente de la volatilidad de los precios, los costos de producción y el convenience yield. Para emitir un juicio final sobre el valor del proyecto y su factibilidad deben tomarse en cuenta todos estos aspectos y eventualmente una resolución del modelo no restringido.

6 BIBLIOGRAFÍA

Apex Silver Mines Limited (2000) “Annual Report”.

Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1985) “Evaluating Natural Resource Investments” Journal of Business, vol 58 no 2.

Copeland, T. E. y Weston J. F. (1988) “Financial Theory and Corporate Policy” Addison-Wesley Publishing Company 10648, Third Edition.

Hull, J. C. (1997) “Options, Futures and other Derivatives” Prentice Hall, Third Edition.

Schwartz, E. S. y Moon, M. (1999) “Rational Pricing of Internet Companies” Working Paper UCLA.

Simmons, G. F. (1993) “Ecuaciones Diferenciales, con Aplicaciones y Notas Históricas” Mc Graw Hill, Segunda Edición.