OPTIMIZACION DINAMICA: UN MODELO POST-CAPITALIZACION EN BOLIVIA

Juan Bernardo Requena Blanco

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de capitalización en Bolivia ha abierto grandes expectativas en los agentes económicos del país. El principal objetivo de esta reforma estructural es atraer inversión y tecnología para que las empresas a capitalizar logren una mayor productividad, y de esta manera, alcanzar un mayor desarrollo. Los sectores a ser capitalizados son: hidrocarburos, electricidad, telefonía, ferrocarriles, fundiciones y aviación.

Para los inversionistas, el principal atractivo de este proceso es permitirles emplear el dinero pagado por la capitalización, directamente en la inversión de las empresas interesadas. De esta manera, se evita el doble costo que representa el proceso de privatización: el gasto por la compra de la empresa y posteriormente los gastos de inversión en modernización de equipos, compra de nuevas máquinas, etc.

Siendo esta una experiencia innovadora, existen algunas situaciones que aún no quedan claras: la diferencia a largo plazo entre capitalización y privatización, el efecto del proceso en toda la economía a mediano y largo plazo[1], el nivel de participación "ideal" de los inversionistas en las empresas a capitalizar, etc.

Actualmente, la capitalización se encuentra en pleno proceso de realización, puesto que la licitación internacional para las empresas ENDE y ENTEL ya ha sido realizada. En este trabajo se analizan los diferentes escenarios que se podrían presentar una vez realizada la adjudicación de las empresas, cuando el nivel de participación de los inversionistas varíe alrededor de 50%[2], mediante la aplicación de la teoría de optimización dinámica a una situación de teoría de juegos, donde dos tipos representativos de agentes económicos tienen por objetivo maximizar su consumo durante el período de análisis considerado.

Este documento se presenta de la siguiente manera: en la segunda sección se explicitan las características de lo que se define como "juego de la Capitalización", en la cual se muestra una modelización de este proceso. Tratándose de una modelización, no se pretende considerar todos los rasgos del proceso, pero por otra parte, el análisis se ve enriquecido, debido a que se toman en cuenta las características más importantes del mismo. En la tercera sección se muestra la solución al problema de optimización dinámica que resulta de la modelización propuesta en la segunda sección.

Posteriormente, en la cuarta sección se plantea una nueva modelización en la cual se demuestra que se puede alcanzar un "óptimo social" mayor a aquel que procede de la solución del problema planteado en la segunda sección.

En la última sección, se discuten las implicaciones de estas modelizaciones y se presentan las conclusiones. Finalmente, dos anexos acompañan a este trabajo

[1] Actualmente, en UDAPE se trabaja en un modelo de Equilibrio General Computable que permitirá evaluar los impactos de este proceso en la economía.

[2] La Ley de Capitalización prevé una participación del 50% por parte de los inversionistas (extranjeros y nacionales).

2. MODELIZACIÓN[3]

Este modelo considera dos tipos de agentes. Por un lado, los accionistas bolivianos o sus representantes, propietarios de más o menos la mitad de las empresas capitalizadas. Estos reciben una proporción de las utilidades de la empresa equivalente a la cantidad de acciones de las cuales son propietarios (a veces se los llamará "contraparte boliviana"). Se supone que estos agentes están dispuestos a consumir solamente una fracción f de las utilidades que les corresponde, para que los agentes llamados "inversionistas" puedan utilizar la fracción restante 1-f y de esta manera aumentar el capital neto de la empresa. Siendo esta una simulación dinámica, la fracción 1-f no se pierde, es invertida en un período inicial para así aumentar las utilidades futuras.

Este ejercicio se lo considera dentro de un contexto de modelización de la teoría de juegos, en el cual se presentan varias posibilidades de comportamiento de los agentes.

Teniendo los inversionistas el control total sobre la inversión y la administración de la empresa, parecería que la contraparte boliviana no puede ejercer ningún tipo de control sobre el proceso. Este no es el caso, por ejemplo debido a consideraciones coyunturales de índole económico, los accionistas bolivianos mediante negociaciones o presiones sindicales pueden conseguir un aumento del nivel de salarios y de esta manera disminuir las posibilidades de inversión (en teoría de juegos estas situaciones se denominan "no cooperativas"). Podrían también ejercer presiones sobre el Gobierno boliviano para que éste cambie la estructura impositiva, variando el nivel de utilidades.

De esta manera, los accionistas bolivianos tienen la posibilidad de modificar su estructura de consumo: consumir menos en el presente para posibilitar una mayor inversión y aumentar el consumo futuro.
Existe el temor en la contraparte boliviana que no se invierta lo suficiente y esto represente menores ingresos futuros.

Se supone que los inversionistas tomarán la decisión de invertir con el único objetivo de maximizar su consumo a lo largo del período considerado. Estos podrían pensar que las instituciones del país no ofrecen suficientes garantías, existe entonces la posibilidad que los inversionistas consuman al máximo e inviertan lo mínimo en el presente, debido a que los ingresos futuros son inseguros.

En este juego dinámico, se considera una interacción entre estos dos tipos de agentes, cada cual con el objetivo de maximizar su propio consumo y con una estrategia propia para llegar a este fin.

Debido a las características del sistema, se lo puede caracterizar como un juego de optimización dinámica. Se aplica el "juego de la capitalización" a una empresa con un tipo determinado de producción. Se supone además, una relación producto sobre capital constante en el tiempo y que toda inversión representa un aumento en el stock de capital.

---

[3] Esta modelización se basa en un artículo de K. Lancaster (1973).

El comportamiento de los agentes es el siguiente: los accionistas bolivianos determinan la proporción de utilidades que desean consumir y consiguientemente aquella que podría ser utilizada para futuras inversiones. Por su parte, los inversionistas siendo los administradores de las empresas capitalizadas, deciden sobre la utilización de las utilidades que les corresponde y sobre aquella que no es consumida por la contraparte boliviana. Ambos tienden a maximizar sus respectivos consumos. Además, se supone que nadie tiende a "descapitalizar" la empresa, es decir que, el capital inicial de la empresa no disminuye con el tiempo.

En este modelo, se supone que ambos agentes continúan "en el juego" hasta una cierta fecha en el tiempo, que para fines de este ejercicio llamamos T, se asume que después de T las inversiones no son rentables.[4]

La proporción del producto que es consumida por la contraparte boliviana en el período t se caracteriza por la función $u_1(t)$ y la fracción de lo que queda, destinada a inversión por $u_2(t)$. Para la función $u_1(t)$ tenemos las condiciones:

$$O < c \leq u_1(t) \leq b < 1 \qquad (1)$$

donde b y c son constantes fijas.

El artículo 4to de la ley de capitalización (No 1544 del 21-III-94) especifica que los inversionistas "no podrán directa o indirectamente adquirir acciones que superen al 50% del total de las acciones en circulación mientras dicho contrato de administración se encuentre vigente", en este caso la constante b tomaría el valor de 0.5, mientras el contrato de administración sea vigente. La constante $c > 0$ implica que no se invierte toda la participación correspondiente a la contraparte boliviana, y que una parte es consumida por los bolivianos.

Adicionalmente, la función $u_2(t)$ representa el total de inversión y puede tomar los valores comprendidos entre 0 y 1. $u_2(t)=0$ significa consumo total por parte de los inversionistas y $u_2(t)=1$ inversión total.

La variable k(t) representa el stock de capital en el momento t.

Dadas estas definiciones, las relaciones importantes en la modelización son:

- Producción total = $a\,k(t)$ (2)
- Consumo de la parte boliviana = $a\,k(t)\,u_1(t)$
- Consumo de los inversionistas = $a\,k(t)\,(1 - u_1(t))\,(1 - u_2(t))$
- Inversión = $a\,k(t)\,(1 - u_1(t))\,u_2(t)$

El problema de optimización dinámica se plantea de la siguiente manera:

[4] Schumpeter (1939) propuso la teoría de ciclos y crecimiento. Se considera que hasta una cierta fecha en la vida "útil" de la empresa vale la pena invertir debido a que la innovación es la verdadera justificación del beneficio, pero que con la introducción de nuevas tecnologías la empresa llega al fin, cayendo su rentabilidad debido a la aparición de empresas con nuevas tecnologías.

(3)

$$\underset{u_1(t)}{\text{Maximizar}} \int_0^T a\, k(t)\, u_1(t)\, d\, t$$ [Maximización del consumo de los bolivianos]

$$\underset{u_2(t)}{\text{Maximizar}} \int_0^T a\, k(t)\, [1 - u_1(t)]\, [1 - u_2(t)]\, dt$$ [Maximización del consumo de los inversionistas]

La inversión total en la empresa representa la ecuación de estado y está definida por:

$$\dot{k}(t) = a\, k(t)\, (1 - u_1(t))\;\; u_2(t)$$

Las condiciones de la ecuación son:

i) $k(0) = k_0 > 0$
ii) $k(T) \geq k_0$ (4)
iii) $0 < c \leq u_1 \leq b < 1$
iv) $0 \leq u_2 \leq 1$

- La primera condición indica que en el momento de comenzar la optimización, la empresa detiene un stock de capital mayor a cero.

- La segunda condición implica que los administradores de las empresas capitalizadas no pueden disminuir el capital inicial de la empresa y así evitar un problema de free-rider que podría surgir (este tema no queda aún muy claro en la ley de Capitalización). En este sentido esta relación representa simplemente una "hipótesis" de modelización, la cual puede ser modificada en caso de tener una idea más clara sobre este asunto.
- La tercera y cuarta condiciones fueron explicadas anteriormente.

¡Error! Marcador no definido.

3. RESOLUCIÓN DEL MODELO

Una vez planteado el modelo, se utiliza la teoría de optimización dinámica para resolver y explicar el comportamiento de la solución.

El principio del máximo permite escribir el Hamiltoniano para cada uno de los agentes. En el caso de los accionistas bolivianos tenemos:

$$H_1(t) = a\,k(t)\,u_1(t) + l_1(t)\,a\,k(t)\,(1-u_1(t))\,u_2(t)) \qquad (5)$$

Siendo el Hamiltoniano una función lineal en u_1, las soluciones pueden escribirse como:

$$u_1(t) = \begin{cases} c & \text{Si} \quad l_1\,u_2 > 1 \\ u_1(t) & \text{Si} \quad l_1\,u_2 = 1 \text{ (solución interna)} \\ b & \text{Si} \quad l_1\,u_2 < 1 \end{cases} \qquad (6)$$

$l_1(t)$ es el precio sombra[5] asociado a la inversión del problema de maximización de los agentes bolivianos, el cual debe resolver la ecuación diferencial:

$$\dot{l}_1 = -\partial H_1/\partial K = -a\,(u_1 + l_1\,(1 - u_1)\,u_2) \qquad (7)$$

El mismo tipo de cálculo permite calcular el Hamiltoniano de los inversionistas:

$$\begin{aligned} H_2(t) &= a\,k(t)\,(1-u_1(t))\,(1-u_2(t)) + l_2(t)\;a\,k(t)\,(1-u_1(t))\,u_2(t) \\ &= a\,k(t)\,(1-u_1(t)\,(1-u_2(t)+ l_2(t)\,u_2(t)) \end{aligned} \qquad (8)$$

Siendo una función lineal en u_2, las soluciones se escriben:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad l_2 < 1 \\ u_2 & \text{Si} \quad l_2 = 1 \quad \text{(Solución interna)} \\ 1 & \text{Si} \quad l_2 > 1 \end{cases} \qquad (9)$$

los precios sombra satisfacen la ecuación diferencial:

---

[5] Si se define V como el valor óptimo de consumo para la contraparte boliviana, se puede mostrar que □V / □k_o = $\lambda_1(o)$, entonces $l_1(o)$ representa el aumento en valor para los accionistas bolivianos en términos del consumo total como consecuencia de un aumento marginal en el stock de capital en el período o.

$$\dot{l}_2 = -\partial H_2/\partial k = -(1 + (l_2 - 1)\, u_2)\,(1-u_1)a \qquad (10)$$

Debido a que a la contraparte boliviana no le interesa participar en la empresa más allá del período T (ver pie de página No. 4), se considera la condición de transversalidad $l_1(T)=0$.

Se consideran los valores extremos de las funciones, las soluciones que se presentan en la modelización son[6]:

$$u_1(t) = C \qquad u_2(t) = 0 \qquad (11)$$

Esta fase, notada fase I, se presenta cuando (i) $\lambda_1(t)\, u_2(t) > 1$ y (ii) $\lambda_2(t) < 1$ (Ver (6) y (9)).

Sin embargo, esta solución no se puede tomar en cuenta; siendo $u_2(t)=0$, la condición i) nunca podría darse. La interpretación de esta situación es que la contraparte boliviana nunca va aceptar un consumo mínimo si los inversionistas no tienen la intención de invertir.

La segunda fase -que se nota II- se presenta cuando $u_1(t)=b$ y $u_2(t)=0$, cumpliendo las condiciones $\lambda_2(t) < 1$ y $\lambda_1(t)\, u_2(t) < 1$. Esta fase se presenta cuando inversionistas y accionistas bolivianos consumen todos sus ingresos. (Situación no-cooperativa).

En la tercera fase, de crecimiento rápido, la contraparte boliviana minimiza su consumo y los inversionistas invierten al máximo. En esta fase la solución es $u_1(t) = c$ y $u_2(t)= 1$, con las condiciones $\lambda_1(t)\, u_2(t) > 1$ y $\lambda_2(t) > 1$.

En la fase IV, se tiene la solución $u_1(t) = b$ y $u_2(t) = 1$, en la cual los inversionistas invierten pero la contraparte boliviana no coopera, se la obtiene en el caso $\lambda_1(t)\, u_2(t) < 1$ y $\lambda_2(t) > 1$.

Gracias al principio del máximo, las condiciones de transversalidad para este ejercicio se escriben:

$$1)\ \lambda_i(T) \geq 0 \forall i,\ 2)\ k(T) \geq 0, 3) \lambda_i(T)\, k(T)\, k(T) = 0$$

Para que las tres condiciones de complementaridad se cumplan, se tiene que satisfacer la condición ($\lambda_i(T)=0$ para i=1,2, cuyo significado se explicó anteriormente.

Puesto que $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ son funciones continuas (este es un resultado clásico de optimización dinámica, ver por ejemplo Lambert (1985)), existe un intervalo $I_1=(t_1,T)$ donde se cumple la relación $\lambda_1(t)\, u_2(t) < 1$ y otro intervalo $I_2=(t_2,T)$ donde $\lambda_2(t)<1$ si $t \in I_2$.

La idea para resolver este modelo es comenzar "desde atrás", por el punto T, donde se tiene información sobre el comportamiento de las funciones λ_i y así continuar "retrocediendo" en el tiempo hasta llegar al origen. Veamos a continuación **elcomportamiento de los λ_i alrededor de T.**

---

[6] A este tipo de soluciones se las llama soluciones "bang-bang".

Puesto que la primera fase no es una solución posible, por argumentos de continuidad, las fases I y IV tampoco son soluciones viables. Por esta razón, la fase que es solución en una "vecindad" de T es la II.

En la segunda fase se cumplen las condiciones $u_1=b$ y $u_2=0$, es así que la ecuación diferencial que satisface el precio sombra para los inversionistas se escribe como:

$$\dot{\lambda}_2 = -(1-b)\,a \qquad (13)$$

La ecuación (13) implica que la función $\lambda_2(t)$ decrece uniformemente en el tiempo, siendo $\lambda_2(t)$ una función continua, consideremos entonces un valor $\bar{t}$ tal que $\lambda_2(\bar{t})=1$, la representación gráfica de la segunda fase es:

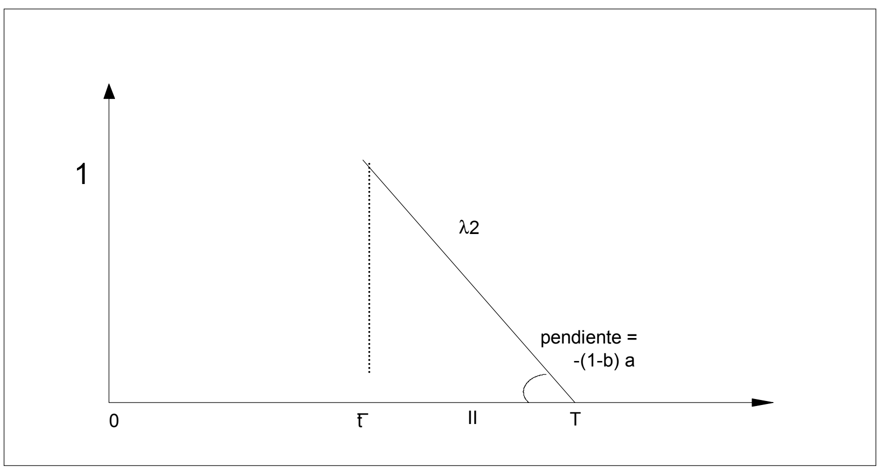

GRAFICO 1

Es posible obtener el valor de mediante la igualdad

$$T - \bar{t} = 1/\,(1-b)\,a \qquad (14)$$

con la cual se consigue el valor

$$\bar{t} = T - 1/(1-b)\,a \qquad (15)$$

Es así que se debe incluir como hipótesis al modelo la condición sobre el horizonte:

$$T > 1/(1-b)\,a \qquad (16)$$

Otra manera de obtener este resultado es mediante la resolución de la ecuación diferencial (13) en el intervalo ($\bar{t}$,T), cuya solución es:

$$\lambda_2(t) = \lambda_2(\bar{t}) - (1-b)\,a\,(t - \bar{t}) \qquad (17)$$

utilizando las relaciones $\lambda_2(\bar{t}) = 1$ y $\lambda_2(T)=0$, se obtiene de nuevo la relación (15).

La función $\lambda_1(t)$ en la fase II resuelve la ecuación diferencial:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -a\,.\,b \qquad (18)$$

Siendo $\lambda_1(t) = \lambda_1(\bar{t}) - a\,b\,(t - \bar{t})$ la solución de (18) en el intervalo ($\bar{t}$,T), utilizando la condición final $l_1(T)=0$, encontramos:

$$\lambda_1(\bar{t}) = b/1-b \qquad (19)$$

Es así que alrededor de $\bar{t}$ se presentan tres posibilidades que dependen del valor que tome b.

a) Si b>0.5, en este caso $\lambda_1(\bar{t})>1$
Utilizando la ecuación (19), la continuidad de $\lambda_1(t)$ y la condición sobre b, la solución gráfica para $\lambda_1(t)$ es:

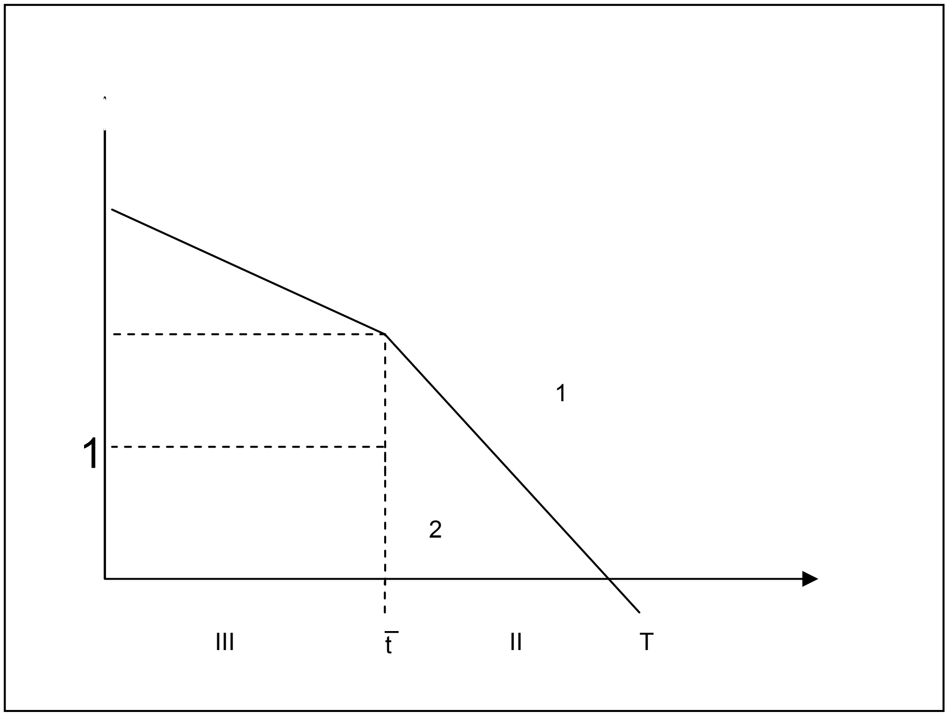

GRAFICO 2

En efecto, para determinar la fase anterior a $\bar{t}$, se toman en cuenta las dos posibilidades restantes: la III y la IV fase. En la tercera fase se tiene: $u_1(t)=c$ y $u_2(t)=1$ y las condiciones son: $l_1(t)>1$ y $l_2(t)>1$.

Se puede demostrar que para los precios sombra : $\dot{l}_1(t)<0$ y $\dot{l}_2(t)<0$, siendo estas funciones decrecientes en el tiempo, la única posibilidad es quedarse en la tercera fase. Por otra parte, la fase IV es una solución incompatible debido a la condición $l_1(t)<1$ que no puede verificarse en una "vecindad" próxima a $\bar{t}$ ($\bar{t}$-e).

b) En el caso que **b<0.5**, en un primer paso se tiene la solución gráfica:

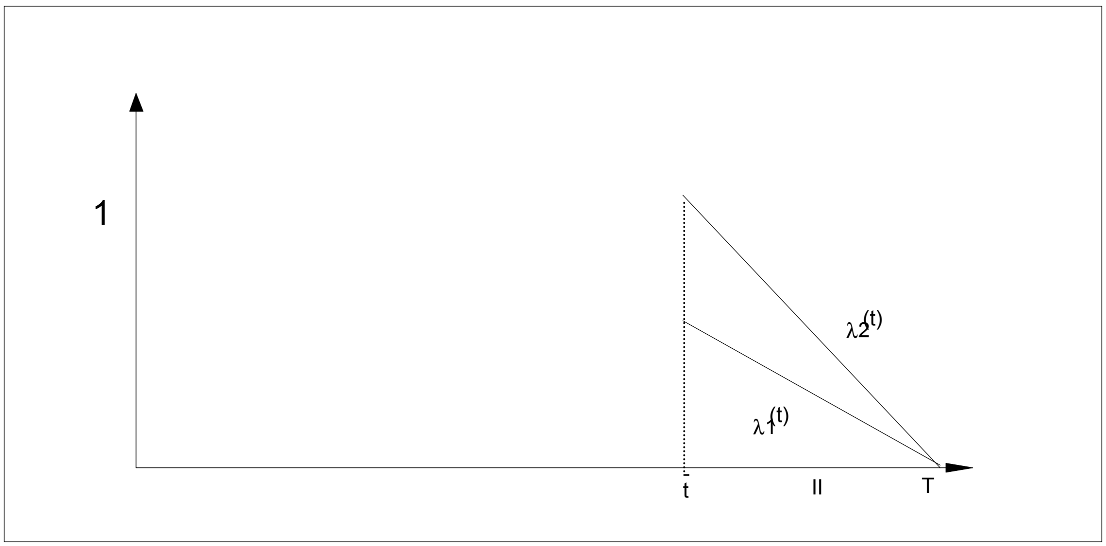

GRAFICO 3

Para encontrar la fase anterior a II, se considera las posibles fases III y IV, tomando en cuenta que en estas fases:

$$\lambda_1(t)\, u_2(t) \;=\; \lambda_1\,(t)$$

En la proximidad de $\bar{t}$ ($\bar{t}$- e), se cumplen las relaciones:

$$\lambda_1(t)\ u_2\ (t) = \ \lambda_1 < 1 \qquad (20)$$

y $\quad \lambda_2\ (t) > 1$

Valiéndose de las relaciones (20), considerando que las funciones $\lambda_i(t)$ son decrecientes y el gráfico 3, se demuestra que la fase anterior a la II es la IVta fase.

Las ecuaciones diferenciales para los precios sombra muestran que las funciones $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ son funciones decrecientes en el tiempo. Siendo $\lambda_1(t)$ una función continua, existe un punto $t_1 \in (0, \bar{t})$ tal que $\lambda_1(t_1)=1$ y $\lambda_2(t)>1$ si t e $(0,t_1)$. En consecuencia, queda una fase anterior a la fase IV y debido a las condiciones de la fase III, se concluye que es con esta fase que empieza el camino de optimización de las funciones $\lambda_i(t)$.

El gráfico de la solución en este caso es el siguiente:

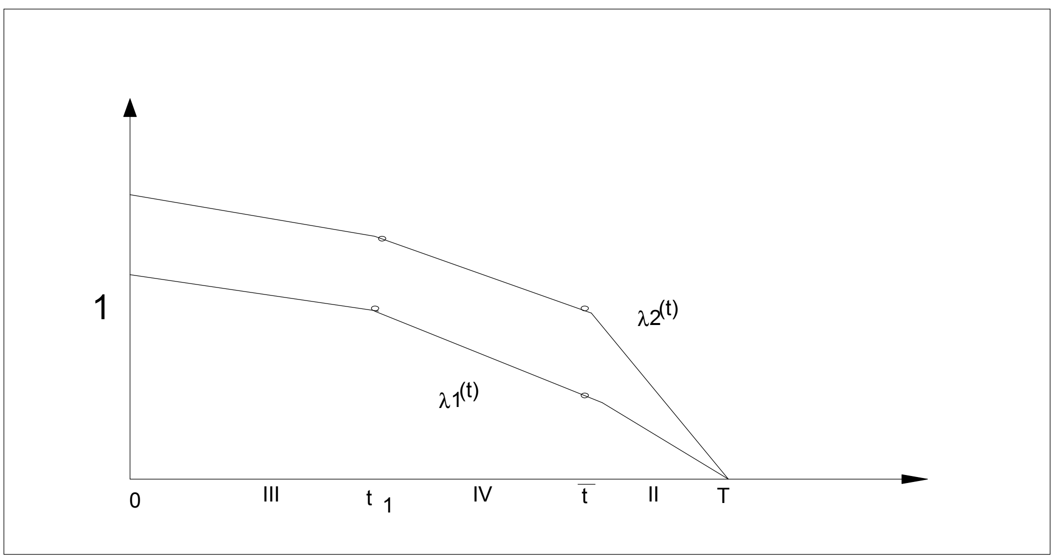

GRAFICO 4

Este gráfico relata la siguiente historia: En un primer período los inversionistas invierten al máximo puesto que la contraparte boliviana minimiza su consumo (llamada etapa de acumulación máxima). Pero, en el período t_1, los accionistas bolivianos deciden ya no cooperar, aunque los capitalistas continúan invirtiendo durante esta fase que dura $\bar{t}-t_1=-\ln 2b/(1+b)a$[7]. En el momento $\bar{t}$, los inversionistas deciden ya no invertir para así ingresar en el período de consumo por parte de los dos tipos de agentes.

c) Una tercera posibilidad se presenta cuando **b=0.5** (valor que actualmente se tiene proyectado en la ley de capitalización, en el corto plazo).

Finalizando como en los dos anteriores casos en la fase II, tenemos dos opciones que se presentan antes que esta fase: la III y la IV, cuyas condiciones en los precios sombra se escriben:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(t) > 1 \\ &\lambda_2(t) > 1 \quad \text{(III)} \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1(t) < 1 \\ &\lambda_2(t) > 1 \quad \text{(IV)} \end{aligned}$$

En el caso que se presente la fase III, la solución es muy parecida a aquella del punto a), excepto que a partir de $\bar{t}$ las funciones de los precios sombra toman exactamente el mismo camino, como se muestra en el gráfico 5.

[7] Este cálculo se lo incluye en el anexo 1.

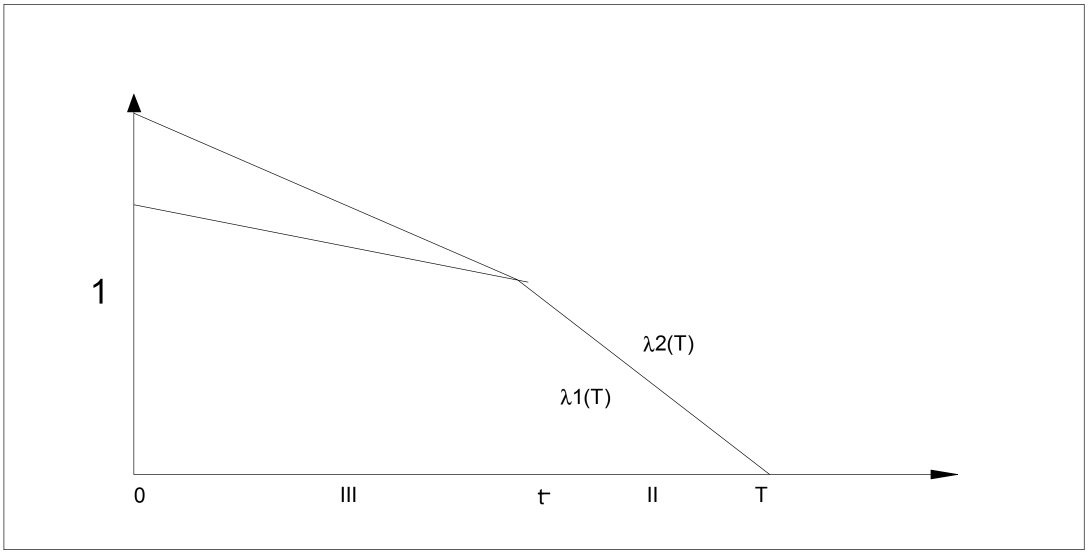

GRAFICO 5

La fase IV no puede presentarse debido a que $l_1(t)$ es una función continua, decreciente, pero que toma un valor menor a 1 en $\bar{t}$ - e (e > 0).

En resumen, cuando b=0.5, la solución es aquella que se presenta en el gráfico 5.

¡Error! Marcador no definido.**4. UN CASO ALTERNATIVO**

En esta sección se presenta un caso de optimización donde no se considera dos tipos de agentes (inversionistas y agentes bolivianos), y en cambio existe un solo tipo de agente representativo, el cual maximiza su consumo total a lo largo del período de horizonte fijo T.

El óptimo social se lo encuentra maximizando la función objetivo:

$$J = J_1 + J_2 = \int_0^T a\, k(t)\,(1 - u_1(t))\, u_2(t)\, dt \qquad (22)$$

bajo la condición de capital:

$$\dot{k}(t) = a\, k(t)\,((1 - u_1(t))\, u_2(t). \qquad (23)$$

para este ejercicio, existe una sola variable de control v, la cual representa la relación inversión sobre producto:

$$v = (1 - u_1)\, u_2 \qquad (24)$$

la misma, se encuentra comprendida entre los valores 0 y 1-c.

Utilizando la metodología desarrollada en la modelización propuesta en la tercera sección, se puede mostrar que la solución a este problema también consta de dos fases:

Ira fase: De máxima acumulación (v=1-c)

IIda fase: En la cual el consumo es máximo (v=0)

El punto en el tiempo donde ocurre el cambio entre la primera y segunda fase es $t^* = T - 1/a$. Teniendo en cuenta que los agentes no se interesan en lo que pasa más allá del horizonte T, se tiene que el precio sombra para el ejercicio en T es cero I(T)=0. Utilizando esta última relación se puede mostrar que $t^* = \bar{t} + b/\, a(1-b)$.

Para comparar la solución propuesta en este ejercicio y aquella que proviene del problema propuesto en la segunda sección, se considera todo el período de tiempo dividido en tres intervalos de tiempo consecutivos:

1) $t \in (0, \bar{t})$
2) $t \in (\bar{t}, t^*)$
3) $t \in (\bar{t}^*, T)$ (25)

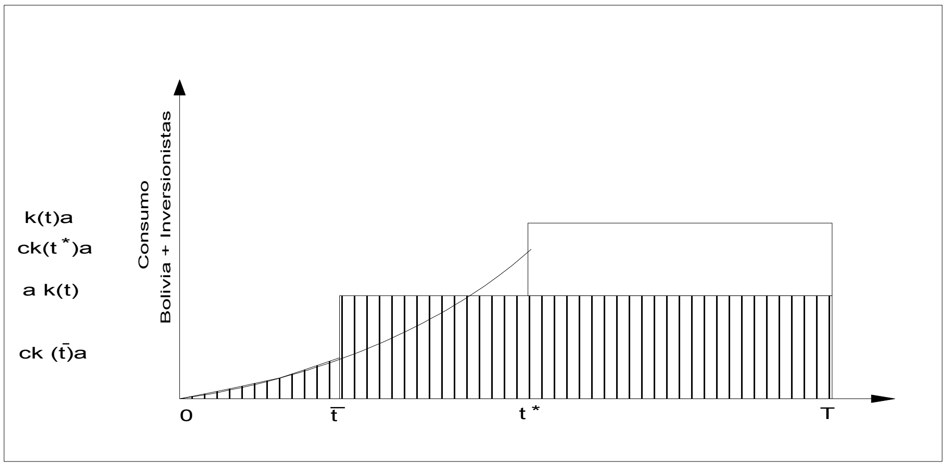

GRAFICO 6

Gráficamente, la solución de este programa y de aquel propuesto en la sección tres es:

En el primer intervalo las dos soluciones son idénticas, el consumo es igual a cak(t) en los dos programas, la variable k(t) crece exponencialmente a una tasa
a(1-c) (puesto que la ecuación de ėstado es k(t) = a (1-c) k (t) (31)).

Es en el segundo intervalo que los dos procesos difieren fundamentalmente. Para el caso de la "primera solución", el consumo agregado de los dos tipos de agente, hace un salto de cak($\bar{t}$) al final del intervalo 1 a ak($\bar{t}$) y se mantiene en ese valor hasta el tiempo T; mientras que en la solución óptima el consumo continua hasta alcanzar t^*.

Finalmente, en el tercer intervalo toda la producción es consumida por los dos agentes, con la diferencia que en la "solución óptima" el consumo es mayor.

¡Error! Marcador no definido.
5. RESULTADOS NUMERICOS

La información sobre las longitudes de los intervalos de las fases calculadas en la sección III queda incompleta, debido principalmente a la incógnita sobre el valor de la constante a, que representa la relación output sobre capital de los diferentes "tipos" de empresa sobre el cual se aplica la modelización.

En este sentido, el trabajo realizado en UDAPE sobre el "cálculo del acervo nacional"[8] proporciona el valor de a para cada uno de los sectores de la economía.

Los valores que se encuentran en el Anexo 2, permiten deducir lo siguiente:

i) La longitud de la "fase de consumo" por parte de los dos tipos de agentes aumenta en proporción al hecho que los accionistas bolivianos sean accionistas mayoritarios (ver tabla 1). De este resultado se puede concluir que una mayor participación accionaria de los agentes bolivianos, los insta a abandonar más rápidamente la "etapa de cooperación" para ingresar en la "etapa de consumo".

ii) Conforme los accionistas bolivianos sean minoritarios, la fase de no cooperación por parte de estos es más larga y al mismo tiempo la fase de consumo por parte de los dos tipos de agentes van en disminución (tabla 2). Una menor participación de los accionistas bolivianos hace que los inversionistas decidan continuar en la fase IV (no cooperación boliviana e inversión por parte de los accionistas extranjeros) puesto que estos detienen una "mayoría" en la empresa y consideran en este sentido a la empresa capitalizada como un negocio "propio", en cambio si la proporción de los agentes bolivianos aumenta esta fase de no cooperación dura muy poco.

iii) Comparando las longitudes de los intervalos en los cuales los inversionistas son propietarios del 50% + x % y 50% - x %, se constata que mientras sean accionistas de una mayor parte, la longitud del intervalo de consumo por parte de los dos tipo de agente se va agrandando (tablas 1 y 2). Una participación menor al 50% por parte de los accionistas bolivianos les induce a entrar en una "fase no cooperativa", razón por la cual la longitud de la fase de consumo por parte de los dos tipos de agentes va disminuyendo, conforme la participación de los bolivianos va reduciendo.

iv) Conforme a la longitud de las fases calculadas, se pueden clasificar los sectores en tres categorías:

    a) De "larga longitud": electricidad, gas y agua; transportes y comunicaciones.

    b) De "media longitud": Agropecuario, minería, hidrocarburos, industrial, manufactura y construcciones.

    c) De "corta longitud": Comercio y Financierios.

[8] "Estimación del acervo de capital físico en la economía Boliviana". por Gualberto Huarachi.

¡Error! Marcador no definido.**6. CONCLUSION**

La posibilidad de incrementar el crecimiento en Bolivia a partir de la atracción de inversiones privadas, hace del proceso de capitalización una piedra angular en la serie de reformas implementadas por este gobierno.

En este trabajo se analizan las diferentes posibilidades que resultarían a partir de la capitalización de las empresas públicas del país.

Una primera modelización muestra que en el caso de participación mayoritaria boliviana ($b > 0,5$), la solución al problema de optimización consta de dos fases, en un primer paso los accionistas e inversionistas, empiezan en una fase cooperativa, en la cual ambos tipos de agentes invierten. Después, en una segunda fase ambos tipos de agentes entran en una fase de consumo.

En un segundo caso, se considera la posibilidad que los accionistas bolivianos sean propietarios de menos de la mitad de la empresa. La solución a este problema consta de tres etapas, en una primera fase llamada cooperativa, ambos tipo de agentes invierten al máximo. A diferencia con el caso anterior, después de este proceso se entra en una etapa que puede ser llamada de "desconfianza", puesto que los inversionistas bolivianos, "minoría" en la sociedad, dudan de los inversionistas extranjeros y deciden a un momento (t_1 en la simulación) ya no "cooperar". Se puede decir que en esta fase existe una cierta "suboptimalidad", debido a que los inversionistas extranjeros continúan invirtiendo, mientras que los accionistas bolivianos entran en una fase de consumo, esta fase dura el tiempo suficiente como para que los inversionistas se den cuenta de la situación y decidan no invertir más. Finalmente, los dos tipos de agentes entran en una fase de consumo.

En un tercer caso, se analiza la posibilidad de que los accionistas bolivianos y los inversionistas extranjeros tengan igualdad de condiciones y participen con 50% cada uno. La solución es muy parecida a aquella que se presenta cuando los accionistas bolivianos son "mayoritarios", es decir que la solución al problema de optimización consta de dos fases: una primera cooperativa y finalmente una fase de consumo por parte de los dos tipos de agentes, en la cual el precio-sombra para cada uno de los agentes es exactamente el mismo.

Un primer resultado que salta a la vista es la "suboptimalidad" resultante de la segunda modelización, una posible explicación a este fenómeno, es que los agentes bolivianos, al no ser mayoritarios en este proceso, desconfíen de los inversionistas extranjeros, puesto que su mayor temor es que estos no inviertan "lo suficiente" o dejen de invertir, por esta razón, prefieren dejar de cooperar debido al temor a que los otros agentes lo hagan primero. En cambio, en el caso de que los accionistas bolivianos sean mayoritarios ($b > 0.5$), les da mayor seguridad, de tal forma que continúan en la fase cooperativa hasta el momento en que inversionistas y accionistas deciden comenzar a consumir en un momento dado.

Una última alternativa se presenta cuando accionistas e inversionistas se constituyen en un sólo tipo de agente, se muestra que la solución a este nuevo problema de optimización es socialmente "más óptima" que aquella que proviene de la simulación donde existen dos tipos de agentes. La pertinencia de esta nueva modelización al caso boliviano es limitada, debido principalmente a la falta de recursos de los propios bolivianos, los cuales podrían muy difícilmente constituirse al mismo tiempo en inversionistas y en accionistas. Es así que, en el caso de que fueran los propios accionistas del país los que invertirían en las empresas capitalizadas, se obtendría un óptimo social mayor que en el caso de que fuesen dos tipos, cada cual intentando optimizar "su" propio consumo a lo largo del tiempo.

La posibilidad de poder evaluar, al menos de una manera comparativa, la longitud de los intervalos de las distintas fases permite inferir sobre el comportamiento de los agentes. Una mayor participación de los bolivianos hace que estos ingresen más rápidamente en la etapa de consumo. En cambio, una menor participación de estos hace que los inversionistas inviertan durante un período más largo -a pesar que los accionistas bolivianos no cooperan- para entrar en una fase de consumo, de duración más corta (relativamente comparando) que aquella en la que los accionistas bolivianos son mayoritarios.

En esta modelización se considera que ambos tipos de agentes maximizan su consumo hasta una cierta fecha en el tiempo (T). La teoría de optimización dinámica permite la posibilidad de optimizar considerando un horizonte infinito, cálculo que se podría realizar en un próximo trabajo.

Debido a las características de la Ley de Capitalización, los inversionistas extranjeros podrían llegar a ser dueños (al término del contrato de administración) de más de la mitad de la empresa capitalizada, lo cual podría provocar una fase de suboptimalidad en dicho proceso (fenómeno que ha sido explicado en el párrafo anterior).

¡Error! Marcador no definido.**ANEXO 1**

Para el cálculo de la longitud de la IVta. fase en el caso que b < 0.5 se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\lambda}_1 + \lambda_1 \; (1\text{-}b)\, a \; + ab = 0 \qquad (1)$$

tenemos las siguientes condiciones en los "bordes":

$$\begin{cases} l_1\,(\bar{t}) = l_1 < 1 \\ l_1\,(t_1) = 1 \end{cases}$$

La solución de la ecuación 1) se la obtiene resolviendo las ecuaciones homogénea y no homogénea asociadas a 1).

Homogénea: No homogénea:

$l_1 = A_o\, e^{(b-1)\, at}$ $y = -b/1-b$

Por lo que la solución general se escribe:

$$\lambda_{1(T)} = A_o\, e^{-(1-b)\, at} - b/1-b$$

el valor de la constante:

$$\lambda_1(t_1) = A_o \,.\, e^{-(1-b)\, at1} \; - \; b/1-b = 1$$

$$A_o = e^{(1-b)\, at1} \; (1 + b/1-b) = e^{(1-b)\, at1}\, (1\, /1-b)$$

reemplazando se encuentra la solución:

$$\lambda_1\, (t) = \; (1\, /\, 1-b)\, e^{(1-b)\, a\, (t1\, -\, t)} -(b\, /\, 1-b) \qquad (2)$$

Por otra parte, se cumplen las relaciones:

$$\lambda_1 = (\bar{t}) = b/1\text{-}b \;=\; 1 / 1\text{-}b \;\; e^{(1-b)a(t1-t)} \; - b / 1\text{-}b \qquad (3)$$

y desarrollando se encuentra finalmente

$$\bar{t} - t_1 = - \ln 2b / (1\text{-}b)\, a \qquad (4)$$

ANEXO 2

TABLA 1: T-t = 1/ (1-b)*a

b>0.5

Sectores	b=0.51	b=0.6	b=0.7	b=0.8	b=0.9	k/Pcto
Agropecuario	4.694	5.750	7.667	11.500	23.000	2.3
Minería	5.306	6.500	8.667	13.000	26.000	2.6
Hidrocarburos	5.102	6.250	8.333	12.500	25.000	2.5
Industrial	4.490	5.500	7.333	11.000	22.000	2.2
Ind.manufacturera	4.490	5.500	7.333	11.000	22.000	2.2
Elec.,gas y agua	26.122	32.000	42.667	64.000	128.000	12.8
Construcciones	5.306	6.500	8.667	13.000	26.000	2.6
Comercio	0.408	0.500	0.667	1.000	2.000	0.2
Transp.y comunicac.	20.000	24.500	32.667	49.000	98.000	9.8
Financieros	1.224	1.500	2.000	3.000	6.000	0.6
Economia Boliviana	8.163	10.000	13.333	20.000	40.000	4.0

TABLA 2: T-t = 1/ (1-b)*a

b>0.5

Sectores	b=0.49	b=0.4	b=0.3	b=0.2	b=0.1	k/Pcto
Agropecuario	4.510	3.833	3.286	2.875	2.558	2.3
Minería	5.098	4.333	3.714	3.250	2.889	2.6
Hidrocarburos	4.902	4.167	3.571	3.125	2.778	2.5
Industrial	4.314	3.667	3.143	2.750	2.444	2.2
Ind.manufacturera	4.314	3.667	3.143	2.750	2.444	2.2
Elec.,gas y agua	25.098	21.333	18.286	16.000	14.222	12.8
Construcciones	5.098	4.333	3.714	3.250	2.889	2.6
Comercio	0.392	0.333	0.286	0.250	0.222	0.2
Transp.y comunicac.	19.216	16.333	14.000	12.250	10.889	9.8
Financieros	1.176	1.000	0.857	0.750	0.667	0.6
Economia Boliviana	7.843	6.667	5.714	5.000	4.444	4.0

(t-t1)=-ln2b/ (1-)b

b<0.5

Sectores	b=0.49	b=0.4	b=0.3	b=0.2	b=0.1	k/Pcto
Agropecuario	0.091	0.855	1.678	2.634	4.113	2.3
Minería	0.103	0.967	1.897	2.978	4.649	2.6
Hidrocarburos	0.099	0.930	1.824	2.863	4.471	2.5
Industrial	0.087	0.818	1.605	2.520	3.934	2.2
Ind.manufacturera	0.087	0.818	1.605	2.520	3.934	2.2
Elec.,gas y agua	0.057	4.760	9.341	14.661	22.890	12.8
Construcciones	0.103	0.967	1.897	2.978	4.649	2.6
Comercio	0.008	0.074	0.146	0.229	0.358	0.2
Transp.y comunicac.	0.388	3.645	7.152	11.225	17.525	9.8
Financieros	0.024	0.223	0.438	0.687	1.073	0.6
Economia Boliviana	0.158	1.488	2.919	4.581	7.153	4.0

TABLA 3: T-t = 1/ (1-b)*a

b>0.5

Sectores	b=0.5	k/Pcto
Agropecuario	4.600	2.3
Minería	5.200	2.6
Hidrocarburos	5.000	2.5
Industrial	4.400	2.2
Ind.manufacturera	4.400	2.2
Elec.,gas y agua	25.600	12.8
Construcciones	5.200	2.6
Comercio	0.400	0.2
Transp.y comunicac.	19.600	9.8
Financieros	1.200	0.6
Economia Boliviana	8.000	4.0

BIBLIOGRAFIA

CHIANG A.C. 1992. Dynamic optimization. Part. 3

HUARACHI, G. 1992. "Estimación del acervo de capital físico en la economía boliviana". Análisis Económico. Ajuste y Crecimiento 3:201-220. (Abril). La Paz, Bolivia: UDAPE.

KAMIEN, M.I.; SCHWARTZ. 1991. Dynamic Optimization.

LAMBERT, P.J. 1985. Advanced Mathematics for Economists, Chapter 7.

LANCASTER, K. 1973. "The Dynamic Inefficiency of Capitalism". JPE. pp. 1092-1109.

LEY DE CAPITALIZACION n. 1544 (21 de marzo 1994). La Paz, Bolivia: Gaceta Oficial de Bolivia

SCHUMPETER, J. 1982. Business Cycles: A Theoretical, Historical an Statistical Analysis, the Capitalism Process, 2000. New York.