Estimación de las Elasticidades de Armington y CET: Una aproximación de Máxima Entropía Generalizada

Roberto Carlos Sevillano Cordero*

Unidad de Análisis de Políticas Sociales y Económicas

Mayo, 2012
La Paz, Bolivia

Resumen

El documento aplica la metodología de Máxima Entropía Generalizada (GME) para estimar las elasticidades de Armington y CET para Bolivia, que servirán para calibrar el modelo de Equilibrio General Computable MAMS[1]. Un conjunto de información clave para la calibración de los modelos de Equilibrio General Computable (EGC) son las elasticidades de sustitución y transformación de *productos* transables, tanto en lo que respecta a la oferta doméstica y las importaciones (Armington), como a la producción doméstica y las exportaciones (CET). Las actividades y bienes para las que se estiman estas elasticidades, en este documento, están especificadas por la Matriz de Contabilidad Social. Para poder establecer los valores de las elasticidades, el investigador tiene dos alternativas: a) basarse en supuestos dictados por la teoría económica y el conocimiento específico de la estructura y funcionamiento de una economía que se puede obtener de un experto, o b) realizar estimaciones econométricas. La información económica, por naturaleza, surge de procesos interdependientes, dinámicos y estocásticos y además está compuesta de observaciones limitadas y no experimentales, situación que en países en desarrollo se agrava con datos limitados que tienen errores de medición que usualmente derivan en los problemas *"Ill-posed"* e *"Ill-behaved"*. Ante esto, las técnicas econométricas clásicas de estimación dan resultados sesgados o espurios. Es así que GME surge como una solución, al no imponer supuestos tan restrictivos sobre la distribución de las variables y los términos de error, no estar condicionada al número de observaciones y además permitir incorporar información que no está presente en los datos.

Palabras Clave: Elasticidades de Armington, Elasticidades CET, Equilibrio General Computable, Máxima Entropía Generalizada.

*Investigador de la Subdirección de Política Macroeconómica UDAPE. El autor desea agradecer los comentarios de Marco V. Sánchez, Martín Cicoweiz, Mirna Mariscal, Rolando Gonzáles y Fernando Landa. Asimismo, se reconoce la colaboración de Stefanie Rakela, Marco Gavincha y Sdenka Claros. Enviar cualquier comentario a csevillano@udape.gob.bo.

[1] *Maquette for MDG-Millennium Development Goal-Simulations*. En el marco del proyecto "Fortalecimiento de la coherencia entre las políticas macroeconómicas y sociales mediante un modelo Macro-Micro Integrado" llevado a cabo conjuntamente para Bolivia por la Unidad de Análisis de Políticas Sociales y Económicas (UDAPE) y Naciones Unidas-Departamento de Asuntos Económicos y Sociales (UN-DESA).

1. Introducción

Una herramienta de análisis y evaluación de políticas públicas que cada día es más relevante en los ámbitos tanto académico como gubernamental, es la modelación de Equilibrio General Computable (EGC). En este marco, las elasticidades que caracterizan a las distintas funciones que definen el modelo, son piezas fundamentales para la calibración adecuada del mismo. Dentro del modelo EGC, se requiere estimar dichas elasticidades para las distintas actividades y bienes descritos en la Matriz de Contabilidad Social (MCS).

En este sentido, un conjunto de información clave para la calibración de los modelos EGC son las elasticidades de sustitución y transformación de bienes transables tanto en lo que respecta a la oferta doméstica y las importaciones (Elasticidades de Armington), y a la producción doméstica y las exportaciones (Elasticidades Constantes de Transformación). Las primeras permiten identificar el grado de sustitución que tiene el consumidor entre adquirir un producto producido domésticamente y el sustituto imperfecto de este producto que es producido en otra economía. Por su parte, las elasticidades de transformación permiten medir el grado de sustitución que el productor tendrá entre producir para el mercado doméstico y producir para el resto del mundo.

Para poder establecer los valores de las elasticidades, el investigador tiene dos alternativas: a) basarse en supuestos dictados por la teoría económica y el conocimiento específico de la estructura y funcionamiento de una economía que se puede obtener de un experto o b) realizar estimaciones econométricas. Si opta por seguir el primer camino, la aproximación puede estar muy alejada de la realidad o estar condicionada a la subjetividad del experto. Asimismo, si opta por la aproximación mediante metodologías econométricas las restricciones surgen de la calidad y cantidad de la información de que se dispone para este fin. Con respecto a lo último la información económica, por naturaleza surge, de procesos interdependientes, dinámicos y estocásticos y que además está compuesta de observaciones limitadas y no experimentales, situación que en países en desarrollo se agrava con datos limitados que tienen errores de medición que usualmente derivan en los problemas *“Ill-posed”* e *“Ill-behaved”*. Ante esto, las técnicas econométricas clásicas de estimación dan resultados sesgados o espurios.

En el marco de la Teoría de la Información, la Máxima Entropía Generalizada (GME) surge como una solución para el investigador. Al ser una metodología que no impone supuestos tan restrictivos sobre la distribución de la variables y los términos de error, y que además permite incorporar información que no está presente en los datos (i.e. rangos determinados por la teoría económica y conjeturas proporcionadas por los expertos), GME permite estimar las elasticidades combinando las alternativas, que antes estaban separadas.

El documento está estructurado como se describe a continuación. En la sección 2 se explican los modelos teóricos que definen las elasticidades de sustitución y transformación de bienes transables. Posteriormente, en la sección 3 se discute brevemente sobre la información disponible para la economía boliviana y los problemas que surgen de la misma. En la sección 4, se expone la metodología de Máxima Entropía Generalizada y se muestran los resultados de la aplicación de esta técnica en la estimación de las elasticidades de sustitución y transformación de bienes transables. Finalmente, en la sección 5 se concluye comentando sobre los resultados.

2. Sustitución imperfecta de bienes transables: Modelos de Armington y de Elasticidad Constante de Transformación (CET)

2.1. Modelo de Armington

Un conjunto de información clave para la calibración de los modelos EGC son las elasticidades de sustitución de *productos* transables[2]. En el modelo de Armington (1969), los productos de un bien determinado, son sustitutos imperfectos desde la perspectiva del consumidor, de tal manera que un consumidor de un determinado país enfrentará una oferta doméstica y una oferta del resto del mundo (i.e. importaciones) y su demanda dependerá únicamente del precio de estos productos.

Sin embargo, luego de establecer que existe sustitución imperfecta entre productos "similares" cuya única diferencia es el país o área de origen, Armington observa que al existir muchos posibles países o áreas de origen, el modelo sería demasiado complicado y no sería de uso práctico por lo cual establece dos supuestos que resuelven este inconveniente simplificando el modelo: a) las elasticidades de sustitución de cada mercado son constantes y b) la elasticidad de sustitución entre dos productos que compiten en un mercado es igual a la elasticidad de otros productos que compiten en el mismo mercado. Estos supuestos permiten establecer que la oferta del bien X_i tiene por forma funcional a la función CES (Constant Elasticity of Substitution):

$$X_i = \phi_i \Big(\alpha_i X_{i,D}^{-\rho_i} + (1-\alpha_i) X_{i,M}^{-\rho_i} \Big)^{-\frac{1}{\rho_i}} \tag{1}$$

Donde i es el índice que señala el bien, $X_{i,D}$ es el producto producido domésticamente, $X_{i,M}$ es el bien producido por el resto del mundo o también producto importado, ϕ un parámetro de escala, α_i un parámetro de distribución y ρ_i un parámetro de sustitución constante. Con la elasticidad de sustitución η_i que resulta de $\eta_i = \frac{1}{1+\rho_i}$. Si η_i es cero los productos son complementarios perfectos es decir no hay posibilidad de sustitución, si η_i es 1 la forma funcional es del tipo Cobb-Douglas y si η_i es ∞ los productos son sustitutos perfectos.

Considerando lo anterior, el problema de optimización que resuelve el consumidor es la minimización del gasto (o minimización del costo de adquisición) del bien X_i, sujeto a la ecuación (1)[3]. Entonces, la representación de este problema viene dada por:

[2]En Armington (1969) se establece que un "bien" X_i es el grupo de *productos* que es ofertado por diferentes países o áreas.

[3]Armington demuestra que la utilidad que el consumidor obtiene de todos los bienes puede ser denotada por la ecuación (1) si se comprueba el supuesto de Independencia, que simplemente dice las Tasas marginales de sustitución entre dos productos de un mismo bien i deben ser independientes de las cantidades de los productos de los otros bienes j con $i \neq j$.

$$
\begin{aligned}
&\min P_{i,D}X_{i,D} + P_{i,M}X_{i,M} \\
&s.a \\
&X_i = \phi_i\Big(\alpha_i X_{i,D}^{-\rho_i} + (1-\alpha_i)X_{i,M}^{-\rho_i}\Big)^{-\frac{1}{\rho_i}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

De las condiciones de primer orden se obtiene la función de demanda relativa:

$$
\frac{X_{i,M}}{X_{i,D}} = \left(\frac{P_{i,D}}{P_{i,M}}\frac{\alpha_i}{1-\alpha i}\right)^{\eta_i} \tag{3}
$$

Para fines de estimación la ecuación (3) puede ser expresada como sigue:

$$
\ln\left(\frac{X_{i,M}}{X_{i,D}}\right) = \beta_0 + \eta_i \ln\left(\frac{P_{i,D}}{P_{i,M}}\right) \tag{4}
$$

Donde $\beta_0 = \eta \ln\left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha i}\right)$.

2.2. Modelo de Elasticidad Constante de Transformación

De manera similar, el modelo de Elasticidad Constante de Transformación (CET) describe la sustitución imperfecta de los bienes transables, pero desde la perspectiva del productor. A partir del supuesto de Powell y Gruen (1968), que introducen los planes de producción CET cuyas isocuantas son idénticas a las CES, el productor enfrenta la demanda doméstica y la demanda del resto del mundo, debiendo decidir cuánto de su producción se destinará al mercado doméstico y cuánto irá al resto del mundo[4]. Por lo tanto el problema de optimización que enfrenta el productor corresponde a la maximización de sus beneficios, representados como las ventas, sujeta al plan de producción, que en este caso se representará como una función CET:

$$
\begin{aligned}
&\max P_i X_i = P_{i,E}X_{i,E} + P_{i,D}X_{i,D} \\
&s.a. \\
&X_i = A_i\left(\delta_i X_{i,E}^{-\varphi_i} + (1-\delta_i)X_{i,D}^{-\varphi_i}\right)^{-\frac{1}{\varphi_i}}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Donde i es el índice que señala el bien, $X_{i,E}$ es el producto vendido en el exterior (exportaciones), $X_{i,D}$ es el producto vendido en el mercado doméstico, A_i es un parámetro de escala, δ_i es un parámetro de distribución y φ_i es un parámetro de transformación constante. La elasticidad de transformación resulta de $\gamma_i = \frac{1}{1+\varphi_i}$. En los casos extremos si γ_i es cero las

[4]Philippidis (1998) y Annabi et al. (2003) señalan que la diferencia entre CES y CET se encuentra en los parámetros de sustitución y transformación respectivamente. En CES ρ_i es mayor que -1 mientras que en CET φ_i es menor que -1. Asimismo, CES es convexa respecto al origen y CET es cóncava respecto al origen.

isocuantas serán del tipo Leontief y el productor venderá los productos $X_{i,E}$ e $X_{i,D}$ en proporciones fijas, si γ_i es -1 las isocuantas son del tipo Cobb-Douglas y si γ_i es $-\infty$ los productos serán sustitutos perfectos con precios idénticos e isocuantas líneales.

A partir de las condiciones de primer orden obtenemos la función de oferta relativa, representada como:

$$\frac{X_{i,D}}{X_{i,E}} = \left(\frac{P_{i,E}}{P_{i,D}} \frac{1-\delta_i}{\delta_i} \right)^{\gamma_i} \tag{6}$$

La ecuación (6), para fines de estimación, puede ser transformada como sigue:

$$\ln \left(\frac{X_{i,D}}{X_{i,E}} \right) = \mu_0 + \gamma_i \ln \left(\frac{P_{i,E}}{P_{i,D}} \right) \tag{7}$$

Donde $\mu_0 = \gamma \ln \frac{\delta_i}{1-\delta i}$.

Las ecuaciones (4) y (7), al ser ecuaciones estáticas nos permiten únicamente estimar las elasticidades de corto plazo, ya que no capturan la dinámica entre cantidades relativas y precios relativos. Para fines de la calibración de modelos EGC, se requieren estimaciones de elasticidades de largo plazo, por lo que se recurre a una especificación de modelos de ajuste parcial (PAM) de la misma manera como se hace en los trabajos de Reinert et al. (1992), Kapuscinky (1999), Nuñez (2009) y Castresana et al. (2010). Esta especificación ajusta las ecuaciones (4) y (7), incorporando un rezago de la variable dependiente:

$$\textit{Armington:} \qquad \ln \left(\frac{X_{it,M}}{X_{it,D}} \right) = \beta_0 + \eta_{1,i} \ln \left(\frac{P_{it,D}}{P_{it,M}} \right) + \eta_{2,i} \ln \left(\frac{X_{it-1,M}}{X_{it-1,D}} \right) \tag{8}$$

$$\textit{CET:} \qquad \ln \left(\frac{X_{it,D}}{X_{it,E}} \right) = \alpha_0 + \gamma_{1,i} \ln \left(\frac{P_{it,E}}{P_{it,D}} \right) + \gamma_{2,i} \ln \left(\frac{X_{it-1,D}}{X_{it-1,E}} \right) \tag{9}$$

Ahora las ecuaciones (8) y (9) nos permiten calcular las elasticidades de largo plazo que vienen dadas por: $\eta_i^{LP} = \frac{\eta_{1,i}}{1-\eta_{2,i}}$ para el modelo de Armington y $\gamma_i^{LP} = \frac{\gamma_{1,i}}{1-\gamma_{2,i}}$ para el modelo CET[5].

3. Información disponible para Bolivia

A fin de estimar las elasticidades mostradas en la sección anterior, se requiere información de volúmenes de importación, exportación, de oferta y demanda del mercado doméstico con los respectivos precios de los productos que conforman los bienes (mercados) que se quiere estudiar. Considerando que el estudio presentado está enmarcado dentro de un modelo EGC, nos remitimos a la clasificación de bienes determinada por la MCS. Si bien la clasificación de

[5]Para un desarrollo detallado del mecanismo de Ajuste Parcial y la obtención de las elasticidades de largo plazo se recomienda consultar a Verbeek(2008).

los productos del Sistema de Cuentas Nacionales de Bolivia de acuerdo a la Matriz Insumo-Producto con año base 1990 determina 36 bienes y actividades, en este documento se agregaron los datos de acuerdo a la MCS y se seleccionaron 11 bienes transables[6], de los que se cuenta con información de volúmenes y valores en frecuencia trimestral provenientes de los cuadros Oferta-Utilización en el horizonte temporal 1990-2006 elaborados por el Instituto Nacional de Estadística (INE).

A fin de establecer una medida de los precios de los productos señalados y siguiendo la aproximación presente en la mayoría de la literatura referente a la estimación de elasticidades de Armington, se calculan los deflactores implícitos a partir del ratio Valor-Volumen.

En la recopilación y tratamiento de la información se identificaron problemas en la calidad de la misma. En muchos casos se encontraron problemas de medición tales como registros de flujos comerciales discontinuos en el tiempo y en otros casos se contaba con muy pocas observaciones. Estos problemas motivaron a buscar alternativas de estimación a las usualmente usadas como son las estimaciones por metodología de series de tiempo[7].

Con respecto a lo anterior, Secondi (2009) señala que la información económica, por naturaleza surge, de procesos interdependientes, dinámicos y estocásticos y que además está compuesta de observaciones limitadas y no experimentales, situación que en países en desarrollo se agrava con datos limitados que tienen errores de medición que usualmente derivan en los problemas *"Ill-posed"* e *"Ill-behaved"*[8]. Ante esto las técnicas econométricas "tradicionales" de estimación no pueden ser implementadas dado que pueden dar lugar a resultados espurios. Es así que en el marco la Teoría de la Información, la Máxima Entropía Generalizada (GME) surge como una solución para el investigador. Al ser una metodología que no impone supuestos tan restrictivos sobre la distribución de las variables y los términos de error, y que además permite incorporar información que no está presente en los datos (i.e. rangos determinados por la teoría económica y conjeturas proporcionadas por los expertos), GME permite estimar las elasticidades combinando las alternativas, que antes estaban separadas.

4. Estimación por Máxima Entropía Generalizada (GME)

El concepto de Entropía se remonta al siglo XIX. En la Termodinámica se define como una medida de desorden de un sistema, específicamente en la segunda ley de la termodinámica se plantea que la Entropía de un sistema cerrado (e.g. el universo) incrementa con el tiempo. Esto último, se refiere a que representa la progresión de un sistema hacia el equilibrio, el cual

[6] La transabilidad de un bien en este documento está determinada por el criterio de existencia de registros de flujos comerciales para el año 2006, año base de la MCS de Bolivia.

[7] En las etapas iniciales de este estudio se trató de estimar las elasticidades empleando el algoritmo usado por Fontes et al. (2003). Los parámetros estimados no reflejaban aquello que el modelo teórico sugería y los resultados en su mayoría eran espurios. Esto motivó a explorar alternativas de estimación a las metodologías "tradicionales".

[8] *"Ill-Behaved"* se refiere a cuando la cantidad de observaciones es muy pequeña y además estos datos no-experimentales pueden contener ruido o pueden provenir de experimentos mal diseñados. Este problema puede derivar en otro problema, *"Ill-posed"*, que se refiere cuando la cantidad de parámetros desconocidos es mayor a las observaciones disponibles.

es alcanzado en el nivel más alto de Entropía. Por su parte, la Teoría de la Información define a la Entropía como una medida de incertidumbre o de falta de información.

Es así que en 1948, Claude Shannon buscaba resolver un problema de ruido presente en los canales de comunicación que distorsionaban u ocasionaban la perdida de información en el mensaje, estableció axiomáticamente una función capaz de medir el grado de incertidumbre contenido en un mensaje, aquella función es la función de entropía[9]:

$$H(\boldsymbol{p}) = -\sum_{k=1}^{K} p_k \ln p_k \tag{10}$$

Si bien la ideas de Shannon llegaron a ser aplicadas en economía y econometría, se experimentaron dificultades técnicas que impedían la aplicación en su forma tradicional que no toma en cuenta las perturbaciones aleatorias. Sin embargo, este problema fue superado con el desarrollo de una nueva metodología propuesta por Golan et al. (1996). En su libro estos autores introdujeron el concepto de la Máxima Entropía Generalizada (GME) que al ser más flexible permitía incorporar términos de perturbación aleatoria en el problema de optimización.

4.1. Estructura y soluciones del problema de Máxima Entropía Generalizada (GME)

Con el propósito de explicar cómo funciona GME, se considera el problema del modelo de regresión lineal que consta de K variables explicativas y T observaciones, que matricialmente se representa:

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{11}$$

Donde $\boldsymbol{y}$ es un vector columna de dimensión T de la variable aleatoria y_t, X es la matriz de dimensión T×K de variables explicativas, $\boldsymbol{\beta}$ es el vector columna de dimensión K de parámetros desconocidos que se desea estimar y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector columna de dimensión T de perturbaciones aleatorias no observadas y no observables.

Golan (2008) explica que en lugar de buscar la estimación puntual de $\boldsymbol{\beta}$, en GME cada β_k es visto como el valor medio de alguna variable aleatoria bien definida llamada $\boldsymbol{z}$. Para esto se debe redefinir $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Si se expresa cada β_k como una variable aleatoria discreta y definimos M como el número de elementos que conforman el "soporte específico" o "*priors*", donde $2 \leq M \leq \infty$, podemos definir $\boldsymbol{z_k}$ como un vector M-dimensional $\boldsymbol{z_k} \equiv (z_{k1}, ..., z_{kM})'$ para todo $k = 1, ..., K$, donde z_{k1} y z_{kM} representan los límites inferior y superior dentro el soporte de cada β_k, respectivamente. Entonces $\boldsymbol{Z}$ es la matriz de dimensión $K \times M$ que consiste de los vectores de soporte $\boldsymbol{z_k}$.

[9]Como anécdota en Golan (2008) se cuenta la leyenda sobre una conversación que sostuvieron John von Neumman y Claude Shannon. Shannon al completar su trabajo sobre la Entropía notó que el término "información" es un término excesivamente usado a lo que Von Neumman respondió "Deberías llamarla Entropía por dos razones: primero, la función ya se usa en termodinámica bajo el mismo nombre; segundo y más importante aún, la mayoría de la gente no sabe que realmente es la Entropía, y si tu usas la palabra Entropía en una discusión, siempre ganarás".

Asimismo, si definimos $\boldsymbol{p_k}$ como la distribución de probabilidades apropiada M-dimensional definida sobre el conjunto $\boldsymbol{z_k}$, podemos definir el parámetro k-ésimo como la combinación convexa de puntos $\boldsymbol{z_k}$ con ponderación $\boldsymbol{p_k}$:

$$\hat{\beta}_k = \sum_m z_{km}\hat{p}_{km} \equiv E_{p_k}[\boldsymbol{z_k}] \tag{12}$$

De acuerdo a esta formulación los datos observados, $\boldsymbol{y}$, son vistos como el proceso de media $\boldsymbol{Z}$ con una distribución de probabilidades $\boldsymbol{P}$ que es definida por los soportes $\boldsymbol{z_k}$ y que está condicionado a X. Golan (2008) señala que la elección del espacio de soportes $\boldsymbol{z_k}$ y el uso de la información de los datos conducen a la estimación de $\boldsymbol{P}$ y esto a su vez permite estimar $\boldsymbol{\beta}$.

El tratamiento de las perturbaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ es similar al anterior, considerando a las perturbaciones como un conjunto de incógnitas, donde se supone que $\boldsymbol{\varepsilon_t} \in V$, donde V es un conjunto convexo que es simétrico alrededor de cero. Cada ε es tratado también como una variable aleatoria, finita y discreta con el espacio de soporte J, donde $2 \leq J \leq \infty$. De la misma manera que se hizo con los β_k's, cada perturbación se redefine como:

$$\hat{\varepsilon}_t = \sum_j \upsilon_j\hat{\omega}_{tj} \equiv E_{\omega_t}[\boldsymbol{\upsilon}] \tag{13}$$

En este caso las perturbaciones observadas son consideradas como realizaciones aleatorias de una distribución con ponderadores de probabilidad $\{\omega_{tj}\}$. A partir de (12) y (13) podemos especificar el modelo lineal:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} = X\boldsymbol{Z}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{w} \\ y_t = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} z_{km}p_{km}x_{tk} + \sum_{j}^{J} \upsilon_j\omega_{tj} \end{gathered} \tag{14}$$

Considerando la función de entropía de Shannon, $H(\cdot)$, el problema de la metodología GME sería:

$$\text{GME} = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{p}} = \text{máx}_{p,\omega}\, H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}) \equiv \text{máx}_{p,\omega}\, \{H(\boldsymbol{p}) + H(\boldsymbol{\omega})\} \\ \equiv -\sum_k\sum_m p_{km}\ln p_{km} - \sum_t\sum_j \omega_{tj}\ln\omega_{tj} \\ s.a. \\ y_t = \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} z_{km}p_{km}x_{tk} + \sum_j^J \upsilon_j\omega_{tj} \qquad t = 1,...,T \\ \sum_m p_{km} = 1 \qquad k = 1,...,K \\ \sum_j \omega_{tj} = 1 \end{cases} \tag{15}$$

Las soluciones para este problema de maximización para las probabilidades $\hat{p}_{km}$ son:

$$\hat{p}_{km} = \frac{\exp(-z_{km} \sum_t \hat{\lambda}_t x_{tk})}{\sum_m \exp(-z_{km} \sum_t \hat{\lambda}_t x_{tk})} \tag{16}$$

y las estimaciones para las probabilidades estimadas $\hat{\omega}_{tj}$:

$$\hat{\omega}_{tj} = \frac{\exp(-\hat{\lambda}_t \upsilon_j)}{\sum_j \exp(-\hat{\lambda}_t \upsilon_j)} \tag{17}$$

Por lo que los valores estimados para $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ son:

$$\hat{\beta}_k \equiv \sum_m z_{km} \hat{p}_{km} \qquad k = 1, ..., K \tag{18}$$

$$\hat{\varepsilon}_t \equiv \sum_j \upsilon_j \hat{\omega}_{tj} \qquad t = 1, ..., T \tag{19}$$

Una de las bondades de GME que resalta Golan (2008), es que permite incorporar información adicional, además de la aportada por los soportes, a través de restricciones tanto estadísticas como teóricas sobre el problema (14). Es así que para fines de estimación de las ecuaciones (8) y (9) se introducen dos restricciones adicionales que aseguran se pueda alcanzar los valores de las elasticidades sugeridos por la teoría económica. Las restricciones teóricas sobre las elasticidades de corto y largo plazo reducen el espacio de soluciones factibles.

Las restricciones adicionales de No-negatividad para el modelo de Armington son:

$$\eta_1 = \sum_m z_{1m} \hat{p}_{1m} \geq 0 \qquad \text{Elasticidad de corto plazo} \tag{20}$$

$$\eta^{LP} = \frac{\sum_m z_{1m} \hat{p}_{1m}}{1 - \sum_m z_{2m} \hat{p}_{2m}} \geq 0 \qquad \text{Elasticidad de largo plazo} \tag{21}$$

Y las restricciones adicionales de Negatividad para el modelo CET son:

$$\gamma_1 = \sum_m z_{1m} \hat{p}_{1m} \leq 0 \qquad \text{Elasticidad de corto plazo} \tag{22}$$

$$\gamma^{LP} = \frac{\sum_m z_{1m} \hat{p}_{1m}}{1 - \sum_m z_{2m} \hat{p}_{2m}} \leq 0 \qquad \text{Elasticidad de largo plazo} \tag{23}$$

4.1.1. Medidas de diagnóstico en GME

A fin de evaluar estadísticamente las estimaciones resultantes de la aplicación de GME, se construyen los estadígrafos presentados para GME por Golan (2008). En este documento nos enfocamos en:

$$\textit{Entropía Normalizada:} \qquad \boldsymbol{S(\hat{p})} = \frac{-\sum_{k,m} \hat{p}_{km} \ln \hat{p}_{km}}{\boldsymbol{K} \ln \boldsymbol{M}} \qquad \boldsymbol{S(\hat{p})} \in [0,1] \tag{24}$$

$\boldsymbol{S(\hat{p})}$ nos permite medir la información relativa contenida en los datos respecto al máximo nivel de incertidumbre. Cuando esta toma un valor de 0 refleja la ausencia de incertidumbre y cuando es 1 refleja la completa incertidumbre. Fraser (2000) establece que valores de $\boldsymbol{S(\hat{p})}$ cercanos a uno significan que la solución es cercana a la distribución uniforme y que los datos concuerdan con los priors de información, para valores cercanos a cero, los priors y los datos reflejan información distinta sobre los parámetros y por lo tanto la solución de GME es no-uniforme. La versión individual para el k-ésimo parámetro mide cuan "ajena" es la variable al modelo si su valor es menor a 0.99 (Golan et al. 1996).

$$\textit{Ratio de Entropía:} \qquad \boldsymbol{ER} \cong 2 \mid H_U(\hat{\beta}) - H_R(\beta = \beta_0) \mid \tag{25}$$

$\boldsymbol{ER}$ es la prueba que nos permite contrastar la entropía del modelo no restringido (H_U) respecto a un modelo restringido (H_R). Cuando la hipótesis nula del modelo restringido es verdadera $\boldsymbol{ER(\hat{\beta} = \beta_0)}$, a medida que T tiende a ∞, se distribuye como una χ^2_K, con K el número de restricciones.

4.2. Elasticidades de Armington y CET: Resultados

Para estimar las elasticidades de Armington y CET se planteó el problema de GME incluyendo las restricciones de No-negatividad y Negatividad respectivamente. Siguiendo a Nganou (2004) se establecieron distintos *priors* de dimensión M=5 para los parámetros a fin de verificar la sensibilidad de las estimaciones. Asimismo, se definieron los *priors* para las perturbaciones siguiendo la regla de simetría "3-σ" alrededor de cero, donde σ es la desviación estándar de la variable dependiente. Asimismo se incluyó un conjunto de variables dicótomas que capturan los efectos estacionales trimestrales.

En el cuadro 1 se reporta los resultados de la estimación para el modelo de Armington. La entropía normalizada presenta valores superiores a 0.99 en todos los casos y los estadígrafos ER reflejan la significancia estadística de los parámetros. En términos de signos las estimaciones son robustas en cuanto estos, son los sugeridos por la teoría. En cuanto a las magnitudes de las elasticidades se observa que estas reflejan el comportamiento esperado para la economía boliviana. Las elasticidades de los bienes Agrícolas industriales, Petróleo Crudo y gas natural, Transportes y Otros Servicios reflejan un alto grado de complementariedad con valores próximos a cero, de estos resalta la elasticidad de Petróleo Crudo y Gas Natural, a partir del estadígrafo ER, que estadísticamente igual a cero reflejando una perfecta complementariedad entre el producto importado y el doméstico. En menor medida los bienes Comunicaciones, Minería, Refinados de Petróleo y otros productos industriales muestran grados considerables de complementariedad con elasticidades en el intervalo [0,1]. Por otra parte, los bienes Agrícolas no industriales, Alimentos y Otros Alimentos tienen elasticidades superiores a uno reflejando un mayor grado de sustitución en la demanda de productos importados y domésticos.

El análisis de sensibilidad a la especificación de los “priors” es reportado en el anexo, y refleja que las estimaciones no varían significativamente ante ampliaciones de estos.

Cuadro 1: **Máxima Entropía Generalizada: Elasticidades de Armington**[†]

Bienes y servicios	**Elasticidad de Corto Plazo**	**Ratio de Entropia** $(H_0 : \eta_1 = 0)^{\ddagger}$	**Elasticidad de Largo Plazo**	**Ratio de Entropía** $(H_0 : \eta_2 = 0)^{\ddagger}$	**Entropía Normalizada**
Agrícolas no industriales	0.9225	5.1883	1.2426	3.8442	0.9962
		[0.0227]		[0.0499]	
Agrícolas industriales	3.40E-07	3.2189	6.55E-07	5.6970	0.9921
		[0.0728]		[0.0170]	
Alimentos	1.10427300	6.1739	2.1131	4.9763	0.9965
		[0.0130]		[0.0257]	
Otros Alimentos	0.4730	3.5919	1.3612	7.0804	0.9964
		[0.0581]		[0.0078]	
Comunicaciones	0.0124	3.2189	0.3875	8.5998	0.9990
		[0.0728]		[0.0034]	
Minería	0.2808	3.3985	0.6953	7.6311	0.9951
		[0.0653]		[0.0057]	
Petróleo crudo y gas natural	1.15E-07	3.2189	2.35E-07	0.0455	0.9951
		[0.0728]		[0.8310]	
Refinados de Petróleo	0.0474	3.2233	0.2570	8.3218	0.9989
		[0.0726]		[0.0039]	
Otros productos industriales	0.2166	3.3158	0.5443	6.9185	0.9995
		[0.0686]		[0.0085]	
Transportes y Almacenamiento	2.78E-07	3.2189	1.91E-06	9.4397	0.9991
		[0.0728]		[0.0021]	
Otros Servicios	3.46E-07	3.2189	1.83E-06	7.0964	0.9988
		[0.0728]		[0.0077]	

Fuente: Cálculos del autor

† Priors de los parámetros {-10 -5 0 5 10}, priors de las perturbaciones {-3σ 0 3σ}

‡ *p-values* presentados entre [ ]

Cuadro 2: Máxima Entropía Generalizada: Elasticidades Constantes de Transformación†

Bienes y servicios	**Elasticidad de Corto Plazo**	**Ratio de Entropia ($H_0 : \gamma_1 = 0$)‡**	**Elasticidad de Largo Plazo**	**Ratio de Entropía ($H_0 : \gamma_2 = 0$)‡**	**Entropía Normalizada**
Agrícolas no industriales	-7.98E-08	3.2189	-3.70E-07	10.6062	0.9987
		[0.0728]		[0.0011]	
Agrícolas industriales	-0.8281	4.0334	-1.1895	4.5935	0.9954
		[0.0446]		[0.0321]	
Alimentos	-3.67E-08	3.2189	-9.32E-08	8.6332	0.9989
		[0.0728]		[0.0033]	
Otros Alimentos	-2.21E-07	3.2189	-3.19E-06	6.9264	0.9984
		[0.0728]		[0.0085]	
Comunicaciones	-1.28E-06	3.2189	-2.28E-05	8.0166	0.9990
		[0.0728]		[0.0046]	
Minería	-0.0932	3.3165	-0.1371	4.3191	0.9998
		[0.0686]		[0.0377]	
Petróleo crudo y gas natural	-1.35E-07	3.2189	-3.42E-07	5.2136	0.9994
		[0.0728]		[0.0224]	
Refinados de Petróleo	-1.18E-08	3.2189	-1.35E-08	-4.1360	0.9889
		[0.0728]		[0.0420]	
Otros productos industriales	-3.76E-07	3.2189	-6.00E-07	4.7670	0.9991
		[0.0728]		[0.0290]	
Transportes y Almacenamiento	-0.3069	3.2785	-1.1562	8.0977	0.9989
		[0.0702]		[0.0044]	
Otros Servicios	-1.11E-07	3.2189	-7.15E-07	11.0505	0.9981
		[0.0728]		[0.0009]	

Fuente: Cálculos del autor

† Priors de los parámetros {-10 -5 0 5 10}, priors de las perturbaciones {-3σ 0 3σ}
‡ *p-values* presentados entre [ ]

En el cuadro 2 se reportan los resultados de la estimación para el modelo CET. Similar al modelo anterior los valores de la entropía normalizada son superiores a 0.99, el estadígrafo ER señala la significancia estadística de los parámetros estimados y los signos son los que predice la teoría. Al revisar las magnitudes resaltan los bienes relacionados a la producción de Alimentos (i.e Agrícolas no industriales, Alimentos, Otros Alimentos), Comunicaciones, Petróleo crudo y gas natural, Refinados de Petróleo, Otros productos industriales y Otros Servicios cuyas funciones de oferta reflejan un alto grado de complementariedad por parte del productor respecto a vender su producto al mercado doméstico y al mercado externo. En menor grado Minería presenta un considerable grado de complementariedad (-0.13). Los bienes Agrícolas industriales y Transportes presentan elasticidades próximas a la unidad (i.e. Tecnología Cobb Douglas).

5. Conclusión

El objetivo del documento era obtener estimaciones confiables de las elasticidades de sustitución (Armington) y transformación (CET) de los bienes transables para la economía boliviana. Enmarcados en el modelo de EGC MAMS, se empleó la clasificación de bienes determinada por la MCS y la información contenida en los Cuadros Oferta-Utilización para los años 1990-2006. Ante los problemas de calidad de información, se recurrió a la implementación de la metodología de Máxima Entropía Generalizada (GME) de tal manera que se contaba con un marco de estimación más flexible capaz de incorporar tanto soportes (o *priors*) a los parámetros estimados como también restricciones teóricas. Los resultados de las elasticidades presentados en esta investigación son robustos, en términos de signos, significancia estadística y magnitudes obtenidas. Las líneas futuras de estimación en el marco de GME estarán enfocadas en la construcción de los intervalos de confianza a partir del *bootstrapping* de los errores para obtener una estimación interválica de las elasticidades, lo que entre otras bondades permitirá ajustar estos parámetros en el proceso de calibración del EGC.

Se debe resaltar que al no existir referentes documentados anteriores sobre el valor que adoptan estos parámetros para la economía boliviana ni tampoco aplicaciones de GME en investigaciones sobre parámetros estructurales que caracterizan esta economía, este documento se perfila como un referente para posteriores estudios al presentar estimaciones confiables, consistentes con la teoría económica calculadas a partir de una metodología que resuelve los problemas de la calidad de información presente, sobretodo en países en desarrollo.

Referencias

[1] Annabi, Nabil, John Cockburn, Berbard Decaluwé (2003). Formes Functionnelles et Paramétrisation dans les MCEG. *CRÉFA-Université Laval.*

[2] Armington, Paul (1969). A theory of Demand for Products Distinguished by Place of Production. *Staff Papers-International Monetary Fund.* Vol. 16, No. 1, pp. 159-178.

[3] Castresana, Sebastián, Martín Cicowiez, Mariangeles Polonsky (2010) Estimación de Elasticidades de Armington para la Argentina. *III Encuentro Regional sobre modelos de EGC* Buenos Aires, Argentina.

[4] Fontes, Octávio, Honorio Kume, Ana Cristina de Souza Pedroso (2003). Armington Elasticities for Brazil - 1986-2002: New Estimates. *Texto para discussão-Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada.* No. 974.

[5] Fraser, Iain (2000). An application of maximum entropy estimation: the demand for meat in the United Kingdom. *Applied Economics- Taylor and Francis Journals.* Vol. 32(1), pp. 45-59.

[6] Golan, Amos, George G. Judge, Douglas Miller (1996). Maximum Entropy Econometrics: Robust Estimation with Limited Data. *John Wiley & Sons.*

[7] Golan, Amos (2008). Information and Entropy Econometrics - A Review and Synthesis. *Foundations and Trends in Econometrics.* Vol. 2. No 1-2, pp. 1-145.

[8] Kapuscinski, Cezary, Peter Warr (1999). Estimation of Armington Elasticities: An Application to the Philippines. *Economic Modelling.* Vol. 16, pp. 257- 258.

[9] Nganou, Jean Pascal (2004). Estimating the key parameters of the Lesotho CGE Model. *International Conference. Input-Output and General Equilibrium: Data, Modelling, and Policy Analysis.* Bruselas, Bélgica.

[10] Núñez, Gaspar (2009). A Maximum Entropy of Armington Elasticities for Mexico. *Twelfth Annual Conference on Global Economic Analysis.* Santiago, Chile.

[11] Philippidis, George (1999). Computable General Equilibrium Modelling of the Common Agricultural Policy.*Tesis doctoral-University of Newcastle.*

[12] Powell, Alan, F.H.G. Gruen (1968). The Constant Elasticity of Transformation Production Frontier and Linear Supply System. *International Economic Review.* Vol. 9, No. 3, pp. 315-328

[13] Reinert, Kenneth, David W. Roland-Holst (1992). Armington Elasticities for United States manufacturing sector.*Journal of Policy Modelling.* Vol. 14, No. 5, pp. 631-639.

[14] Secondi, Luca (2009). Entropy approaches for the Production and Demand Function Parameter Estimation in a Regional CGE Model Framework. *Tesis Doctoral- Università degli Studi di Firenze.*

[15] Verbeek, Marno (2008). A guide to Modern Econometrics Third Edition. *John Wiley & Sons.*

Anexos

Cuadro 3: Sensibilidad a los priors de los parámetros: Elasticidades de Armington

Bienes y servicios	Priors de los parámetros	Elasticidad de Corto Plazo	Ratio de Entropía $(Ho:\eta_1=0)^{\ddagger}$	Elasticidad de Largo Plazo	Ratio de Entropía $(Ho:\eta_2=0)^{\ddagger}$	Entropía Normalizada
Agrícolas no industriales						
	{ -10 -5 0 5 10}	0.922	0.0227	1.243	0.0499	0.9962
	{-20 -10 0 10 20}	0.937	0.0225	1.250	0.0507	0.9990
	{-50 -25 0 25 50}	0.937	0.0224	1.253	0.0510	0.9998
Agrícolas industriales						
	{ -10 -5 0 5 10}	3.403E-07	0.0728	6.553E-07	0.0170	0.9921
	{-20 -10 0 10 20}	3.028E-07	0.0728	5.767E-07	0.0199	0.9979
	{-50 -25 0 25 50}	2.934E-07	0.9996	5.572E-07	0.0208	0.9997
Alimentos						
	{ -10 -5 0 5 10}	1.104	0.0130	2.113	0.0257	0.9965
	{-20 -10 0 10 20}	1.117	0.0127	2.110	0.0269	0.9991
	{-50 -25 0 25 50}	1.121	0.0127	2.109	0.0273	0.9999
Otros Alimentos						
	{ -10 -5 0 5 10}	0.473	0.0581	1.361	0.0078	0.9964
	{-20 -10 0 10 20}	0.494	0.0572	1.367	0.0094	0.9990
	{-50 -25 0 25 50}	0.500	0.0570	1.368	0.0099	0.9998
Comunicaciones						
	{ -10 -5 0 5 10}	0.012	0.0728	0.388	0.0034	0.9990
	{-20 -10 0 10 20}	0.006	0.0728	0.218	0.0037	0.9997
	{-50 -25 0 25 50}	0.005	0.0728	0.162	0.0038	1.0000
Minería						
	{ -10 -5 0 5 10}	0.281	0.0653	0.695	0.0057	0.9951
	{-20 -10 0 10 20}	0.264	0.0662	0.633	0.0072	0.9987
	{-50 -25 0 25 50}	0.259	0.0665	0.615	0.0076	0.9998
Petróleo crudo y gas natural						
	{ -10 -5 0 5 10}	1.149E-07	0.0728	2.349E-07	0.8310	0.9951
	{-20 -10 0 10 20}	1.157E-07	0.0728	2.345E-07	0.4102	0.9983
	{-50 -25 0 25 50}	1.159E-07	0.0728	2.347E-07	0.3468	0.9997
Refinados de Petróleo						
	{ -10 -5 0 5 10}	0.047	0.0726	0.257	0.0039	0.9989
	{-20 -10 0 10 20}	0.047	0.0726	0.259	0.0041	0.9997
	{-50 -25 0 25 50}	0.047	0.0726	0.259	0.0041	1.0000
Otros productos industriales						
	{ -10 -5 0 5 10}	0.217	0.0686	0.544	0.0085	0.9995
	{-20 -10 0 10 20}	0.219	0.0686	0.551	0.0085	0.9999
	{-50 -25 0 25 50}	0.219	0.0686	0.553	0.0085	1.0000
Transportes y Almacenamiento						
	{ -10 -5 0 5 10}	2.784E-07	0.0728	1.906E-06	0.0021	0.9991
	{-20 -10 0 10 20}	2.790E-07	0.0728	1.915E-06	0.0023	0.9998
	{-50 -25 0 25 50}	2.792E-07	0.0728	1.917E-06	0.0024	1.0000
Otros Servicios						
	{ -10 -5 0 5 10}	3.464E-07	0.0728	1.826E-06	0.0077	0.9988
	{-20 -10 0 10 20}	3.315E-07	0.0728	1.728E-06	0.0087	0.9997
	{-50 -25 0 25 50}	3.275E-07	0.0728	1.702E-06	0.0090	1.0000

Fuente: Cálculos del autor

‡ *p-values* evaluados en una distribución χ^2_1.

Cuadro 4: Sensibilidad a los priors de los parámetros: Elasticidades Constantes de Transformación

Bienes y servicios	Priors de los parámetros	Elasticidad de Corto Plazo	Ratio de Entropía ($Ho:\gamma_1=0$)	Elasticidad de Largo Plazo	Ratio de Entropía ($Ho:\gamma_2=0$)	Entropía Normalizada
Agrícolas no industriales						
	{-10 -5 0 5 10}	-7.980E-08	0.0728	-3.700E-07	0.0011	0.9987
	{-20 -10 0 10 20}	-6.681E-08	0.0728	-3.061E-07	0.0013	0.9997
	{-50 -25 0 25 50}	-6.695E-08	0.0728	-3.056E-07	0.0013	0.9999
Agrícolas industriales						
	{ -10 -5 0 5 10}	-0.828	0.0446	-1.190	0.0321	0.9954
	{-20 -10 0 10 20}	-0.838	0.0444	-1.203	0.0323	0.9988
	{-50 -25 0 25 50}	-0.841	0.0443	-1.207	0.0323	0.9998
Alimentos						
	{ -10 -5 0 5 10}	-3.673E-08	0.0728	-9.3154E-08	0.0033	0.9989
	{-20 -10 0 10 20}	-3.677E-08	0.0728	-9.3228E-08	0.0034	0.9997
	{-50 -25 0 25 50}	-3.678E-08	0.0728	-9.3249E-08	0.0034	1.0000
Otros Alimentos						
	{ -10 -5 0 5 10}	-2.209E-07	0.0728	-3.191E-06	0.0085	0.9984
	{-20 -10 0 10 20}	-2.260E-07	0.0728	-3.262E-06	0.0091	0.9996
	{-50 -25 0 25 50}	-2.275E-07	0.0728	-3.283E-06	0.0092	0.9999
Comunicaciones						
	{ -10 -5 0 5 10}	-1.280E-06	0.0728	-2.284E-05	0.0046	0.9990
	{-20 -10 0 10 20}	-1.352E-06	0.0728	-2.448E-05	0.0049	0.9998
	{-50 -25 0 25 50}	-1.372E-06	0.0728	-2.496E-05	0.0049	1.0000
Minería						
	{ -10 -5 0 5 10}	-0.093	0.0686	-0.137	0.0377	0.9998
	{-20 -10 0 10 20}	-0.093	0.0686	-0.137	0.0377	1.0000
	{-50 -25 0 25 50}	-0.093	0.0686	-0.137	0.0377	1.0000
Petróleo crudo y gas natural						
	{ -10 -5 0 5 10}	-1.354E-07	0.0728	-3.4183E-07	0.0224	0.9994
	{-20 -10 0 10 20}	-1.353E-07	0.0728	-3.4190E-07	0.0244	0.9998
	{-50 -25 0 25 50}	-1.352E-07	0.0728	-3.4191E-07	0.0250	1.0000
Refinados de Petróleo						
	{ -10 -5 0 5 10}	-1.183E-08	0.0728	-1.354E-08	0.0420	0.9889
	{-20 -10 0 10 20}	-1.189E-08	0.0728	-1.355E-08	0.0394	0.9972
	{-50 -25 0 25 50}	-1.190E-08	0.0728	-1.355E-08	0.0387	0.9996
Otros productos industriales						
	{ -10 -5 0 5 10}	-3.760E-07	0.0728	-6.0041E-07	0.0290	0.9991
	{-20 -10 0 10 20}	-3.794E-07	0.0728	-6.0487E-07	0.0293	0.9998
	{-50 -25 0 25 50}	-3.804E-07	0.0728	-6.0614E-07	0.0293	1.0000
Transportes y Almacenamiento						
	{ -10 -5 0 5 10}	-3.0686E-01	0.0702	-1.1562E+00	0.0044	0.9989
	{-20 -10 0 10 20}	-3.1582E-01	0.0701	-1.1797E+00	0.0047	0.9997
	{-50 -25 0 25 50}	-3.1843E-01	0.0701	-1.1865E+00	0.0048	1.0000
Otros Servicios						
	{ -10 -5 0 5 10}	-1.1113E-07	0.0728	-7.1461E-07	0.0009	0.9981
	{-20 -10 0 10 20}	-7.7118E-08	0.0728	-4.8581E-07	0.0010	0.9995
	{-50 -25 0 25 50}	-7.7315E-08	0.0728	-4.8422E-07	0.0010	0.9999

Fuente: Cálculos del autor

‡ *p-values* evaluados en una distribución χ_1^2 evaluados en una distribución χ_1^2 evaluados en una distribución χ_1^2 v evaluados en una distribución χ_1^2 evaluados en una distribución χ_1^2.